الرسم الهندسى
(الإسقاط)
الهندسة الوصفية

د.م. أحمد محمد القصاص

مكتبة الأنجلو المصرية

الرسم الهندسى «الإسقاط»

الهندسة الوصفية

الرسم الهندسى «الإسقاط»
الهندسة الوصفية

تأليف
دكتور مهندس / أحمد محمد القصاص
مدرس الهندسة الصناعية ـ كلية الهندسة

مكتبة الأنجلو المصرية
١٦٥ ش محمد فريد - القاهرة

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد الهيئة المصرية العامة لدار الكتب والوثائق القومية ، إدارة الشئون الفنية .

القصاص ، أحمد محمد

الرسم الهندسى " الاسقاط " : الهندسة الوصفية /

تأليف أحمد محمد القصاص. ـ ط١. ــ

القاهرة : مكتبة الانجلو المصرية ، ٢٠٠٦ .

٣٥٢ ص ، ٢٠ × ٢٨ سم

١- الهندسة الوصفية أ- العنوان

٢- الرسم الهندسى

رقم الإيداع : ٤٤١٩

ردمك: ٩٧٧-٠٥-٢٢٢٣-٦ تصنيف ديوى :٥١٦,٦

الناشر : مكتبة الانجلو المصرية

١٦٥ شارع محمد فريد

القاهرة ــ جمهورية مصر العربية

ت : ٣٩١٤٣٣٧ (٢٠٢) ؛ ف : ٣٩٥٧٦٤٣ (٢٠٢)

E-mail : angloebs@anglo-egyptian.com

Website : www.anglo-egyptian.com

إهــداء

إلى أبى الغالى الذى تفانىً وضحى بكل شىء حتى أكون أحسن الناس

وجعلنى دائما أبحث عن مسلكى الصحيح

وروح أمى التى قالت يوما ما /لن تكون إلا كذلك

وروح جدى الذى وهبنى العمق والأصالة ومنحنى الأسباب

وزوجتى التى ضحت من وقتها حتى أتفرغ لهذا العمل

وإلى

أستاذى الأستاذ الدكتور/توفيق توفيق الميدانى

وأستاذى الأستاذ الدكتور/أحمد البهلول

وإلى

كل من حاول ولم يصل

محتويات الكتاب

الباب السادس: الموضع

الباب السابع: الإسقاط المساعد

الباب الثامن: القياس

الباب التاسع: الدائرة

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

الباب العاشر: الكرة

الباب الحادى عشر: كثيرات السطوح

المؤلف

عزيزى القارىء ماهى حياتك وماهى الإستفادة من ما تفعله وهل لك هدف أم لا وهل أنت صاحب قضية وهل أنت صاحب رأى وهل أنت إنسان تأكل وتشرب أولا أم تحيا ليحيى معك البشر وتعيش فى التاريخ. يجب أن نعلم أن أستاذ الجامعة منظومة من الأخلاق والعلم والمبادىء من شأنه أن يُغير الواقع تغيرا إرتقائيا ليتغير هو فى مجرى تغــيره للواقــع شريطة أن يُقدم للمجتمع من هو أفضل منه خُلقا وعلما- فهل أنت ممن قيل عنهم " خير الناس أنفعهم للناس" أو " دنيا سكك حافظ على مسلكك .... أهلك لاتهلك إنت بالناس ترتقى" إن كنت كذلك فسوف تفعل للناس ماينفعهم ولن تفعل للناس وهم أهلك ماينفعهم إلا إذا كنت تؤمن بالله الواحد القهار ورُسله. وإن كنت كذلك فإنه يكون لديك ماتعطيه للناس ولاتبحث عن ما تأخذ من الناس ، فتــبزل الغالى والنفيس فى خدمة مجتمعك والبشرية وتعمــل بمبــدأ الحديث الشريف ..أعمل لدنياك كأنك تعيش أبدا وأعمل لأخرتك كأنك تموت غدا. ومن هذا المبدأ ، فقد أجتهدت فى عمل هذا الكتاب راجيا من الله أن يُسهل به على كل متعسر فى فهم المادة كعلم وكمنهج ويرحمهم من تكبر وتعــالى من يُدرسوا هذه المادة دون فهم ووعى ويسهل على كل أستاذ أن يعى ما يقول ويكون لديه الطريق والتسلسل العلمى والفكرى لتتابع العمليات بالنسبة لفكر الطالب، وخاصة أنها طُبقت على شريحة كبيرة من الطلاب وتمت الإستفادة من تعثراتهم فى فهم الأمور لإعادة ترتيب عرض البنود. وقد فضلت أن أشرح هذا الكتاب بإسلوب الحديث مع الطالــب وكأنه يجلس أمامى أشرح له. وقد أطلقت أسم يخصنى على هذا العلم وهو *علم الكلام وتفسير الأحلام* ، لأن هذا العلم يعتمد على الكلام أكثر بكثير من الأرقام وتأتى الصعوبة عندما يقرأ الطالب الأرقام ويترك الكلام. لذلك عند المُذاكرة يجب جيدا أن ترى الأساسيات وتعرف كيف تم وصفها ومميزاتها حتى تستطيع أن تستغلها جيدا. لذا فلقد حاولــت أن أسهل على الناس كل ماأستطعت عليه فى هذا العلم وليعلم القارىء أننى الذى كتبت الكتاب بنفسى وكذلك التمارين الموجودة فيه وإن كان هناك أى خطأ فأرجو أن تراسلونى على عنوانى البريدى أو هاتفيا حتى يمكن تصــحيح أى خطــأ وأسألكم الدعاء فأنا لم أبغى من هذا الكتاب إلا أن أسهل على الناس طلاب وأساتذة فهم هذا العلم.

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

مدرس الهندسة الصناعية - كلية الهندسة

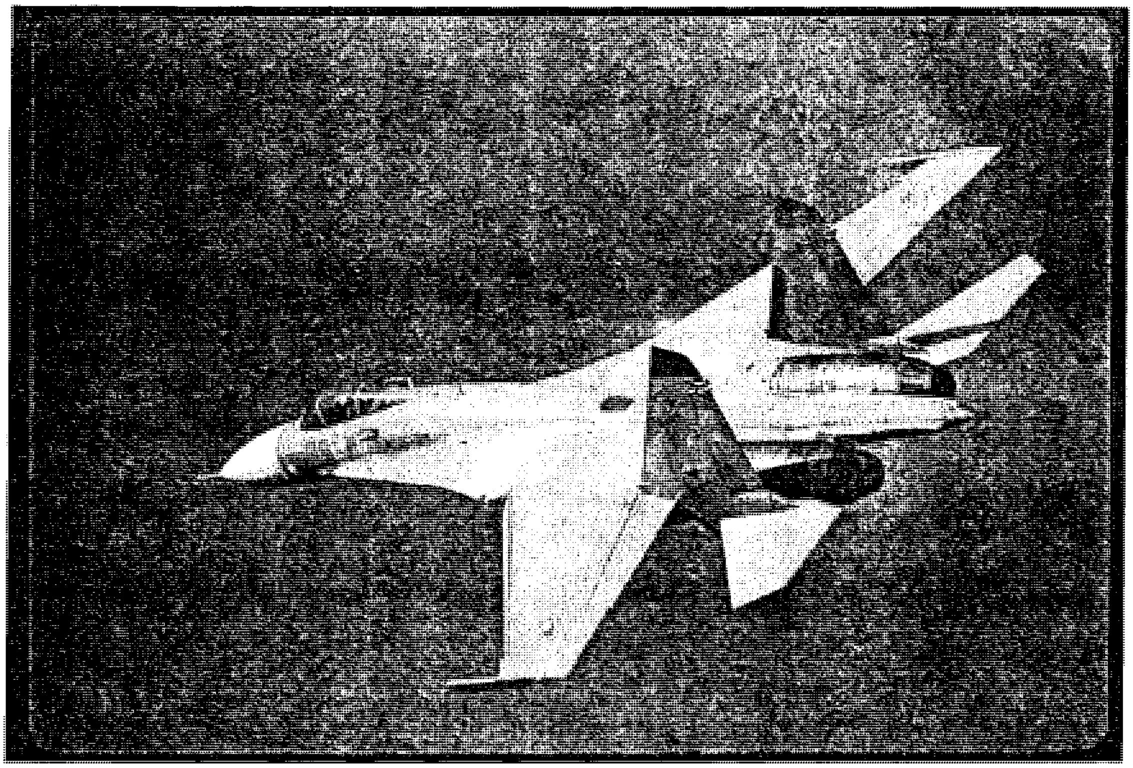
المقدمة

المقدمة

هذا الكتاب هو مؤلف فى علوم الإسقاط لمكونات الأجسام وكذلك الأجسام بأنواعها وهى ماتسمى بالهندسة الوصفية. وقد يغيب عن البعض أو يسأل كثيرا من الطلاب السؤال المعتاد لماذا ندرس هذا العلم وماهى الفائدة من دراسة هـذا العلم. والإجابة على هذا السؤال أعتبرها أنا شخصيا حضارة الأمة الماضى والحاضر. ففى الماضى فعلها الفراعنة وجعلونا فوق الأعناق كأصحاب تاريخ وحضارة وصنعوا لنا أهرامات ظل وسيظل العالم على تقدمه يتمنى أن يعلم كيف فعلوها وحولوها من إسقاط على أوراق البردى إلى أجسام فاعلة تنير خطى العالم من ناحية وتُشعره بعجزه من ناحية أخـرى. صنعوا سفن الشمس وصنعوا الأدوات الحربية وصنعوا المسلات وكلها أجسام ذات صفات كثيرة. والعالم الأن يصـنع الكثير، فرمز دولة الكويت تجده مخروط ومتوسطه كرة. صناعات كثيرة من طائرات وسفن وأجهزة معقـدة الشـكل الخارجى وكلها تُرسم على الورق أولا ثم تُحول للواقع بعد ذلك. ولكى نتعامل مع مجرد الفكرة التى تأتى للمصمم لابد أن يصيغها وصفيا (كوصف للفكرة من خلال خطوط عريضة، ثم يبدأ فى وضع هيكل عام للفكرة، ثم يبـدأ فى رسمهـا تفصيليا فى إتجاهات متعددة حتى تتضح رؤيتها من بعض الإتجاهات. والإجابة النهائية تكون فى كيفيـة تحويـل مـاعلى الأوراق إلى حقيقة. وليتم ذلك سنفعله بخامات نأتى بها وفى الغالب تكون خامات مسطحة ، أوراق مفرودة، ألواح من المعادن، وغيرها. ولكن يبقى أن نعرف ماهو الشكل الذى يجب أن نقطع علية الألواح حتى تتحول عند تشـكيلها إلى الشكل النهائى الذى صممناه. هذا يتطلب أن تكون الأجسام المُصممة مفرودة على الورق ومعلوم مساحاتها وشـكلها وكذلك التقاطعات الموجودة فيها أى إفراد كامل لها.

إفراد السطوح تعتبر من الموضوعات الهامه فى الحياة العملية وهى تلخص ماسعينا لتعلمه من بداية هـذا العلـم. والأمثلة كثيرة على ذلك، لأننا عندما نصمم جسما فإن هذا الجسم له أبعاده الخارجية وأشـكاله وكـذلك كـثيرات السطوح والسطوح الدورانية كما فىالشكل الوضح، الجزء الأمامى من الطائرة وكيفية أنه يتكون من أكثر من جـزء منحنى. وكمثال أخر فى مداخن المصانع هى إسطوانات متقاطعة وهى كانت فى الأصل قبل التصنيع ألواح من الصـاج لذلك كانت الخطوة الأولى بعد التصميم هى معرفة مساحة الألواح الصاج التى سيتم قطعها مفرودة ومسطحة بحيـث يكون شكلها عند التصنيع والتطبيق تعطى الشكل الذى تم تصميمه. وقِس على ذلك كل الأشكال التى تُصـمم مـن

أجسام الأجهزة والمعدات وعبوات التعبئة والعلب الكرتون التى توضع بها البضائع. ومن هنا ظهر أهمية هذه الجزء من العلم والتى يجب على المهندس تعلمه جيدا. حيث وجب على طالب كلية الهندسة أن يجيد هذا العلم. وإننى شخصيا أُرجع التأخر فى عملية التصنيع فى الدول النامية إلى أن المهندسين لايجيدوا هذا العلم ويتركوه للفنيين (الصنايعية) للعمل فيه بالشبهه أو بالقياس. وأخيرا يُستغل فى إيضاح مستويات بعض المناطق على الخرائط وتطبيقات الإسقاط المرقوم وخاصة فى المساحة الجوية.



لذلك فأنا أنصح المهتمين ومخططى الدولة والصناعة أن يُعطوا هذا العلم مزيدا من الأهمية والفاعلية وكذلك إيفاد البعثات للتعلم فى هذا الإتجاه حتى نعلم كيف نُنتج مانفكر فيه ونتطور أكثر من الوضع الذى أصبحنا عليه.

علم الهندسة الوصفية

علم الهندسة الوصفية هو علم يهتم بإسقاط مكونات الأجسام سواء النقطة أو المستقيم أو المستوى وكذلك تعاملهم مع بعض من ناحية التوازى والتعامد والتقاطع وتكون الأجسام وإفرادها وتقاطع الأجسام مع بعضها وغيره من التعاملات بينهما. لذلك فإن هذا الكتاب يتناول الموضوعات الأتية:

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

الباب الأول:تمهيد

يوضح طبيعة العمل ونوع الرموز المستخدمة والأنواع المختلفة من الإسقاط

الباب الثانى: الإسقاط العمودى

وفيه يتم التعريف للفراغ الهندسى وطبيعته فى التعامل معه سواء فى الرسم الهندسى أو الهندسة الوصفية، ثم طبيعة الإسقاط العمودى على المستويات.

الباب الثالث: النقطة

وفيه يتم تعريف النقطة فى الإسقاط ووضعها فى الفراغ وكذلك كيفية إسقاطها سواء كان من منظور الهندسة الوصفية أو الرسم الهندسى

الباب الرابع: المستقيم

وفيه يتم تعريف المستقيم فى الفراغ ثم تمثيل المستقيم وأوضاعه الخاصة وكذلك العلاقة بين المستقيمات وبعضها ثم الإسقاط الكامل لأوضاع المستقيمات على مستويات الإسقاط، ثم يشرح نظرية توليد المستقيمات من خلال علاقة النقطة بالمستقيم، وأخيرا أوضاع نفس المستقيمات فى الفراغ من منظور الرسم الهندسى.

الباب الخامس: المستوى

وفيه يتم تعريف المستوى فى الفراغ ثم تمثيل المستوى وأوضاعه الخاصة وكذلك العلاقة بين المستقيمات الواقعه فى المستوى وبعضها ثم الإسقاط الكامل لأوضاع المستويات على مستويات الإسقاط، ثم يشرح نظرية توليد المستقيمات من خلال علاقة النقطة بالمستقيم ووقوعهم داخل المستوى ، وأخيرا أوضاع نفس ا المستويات فى الفراغ من منظور الرسم الهندسى.

الباب السادس: الموضع

وفيه ثلاثة محاور : أولا رسم مستوى يوازى مستوى سواء كان المستوى ممثلا بأثاره أو بمستقيمين ، ثانيا خط تقاطع مستويين بالأوضاع الخاصة للمستويات، ثالثا: نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى متضمنا الأوضاع الخاصة للمستقيمات والمستويات. وهذا الباب تم تقديمه بإسلوب مختلف عن ماسبقونا لسهولة التعامل معه

الباب السابع: الإسقاط المساعد

وفيه كيفية التعامل مع المستقيمات لتحويلها لأوضاعها الخاصة التى يظهر فيها طولها الحقيقى ثم الإسقاط المتتالى للوصول لأوضاع المستقيمات الخاصة التى تظهر فيها نقطة، ثم الإسقاط المساعد للمستويات لتحويلها لأوضاعها الخاصة التى تظهر فيها خط المسقط ثم الإسقاط المتتالى للوصول لأوضاع المستويات الخاصة التى تظهر فيها بشكلها الحقيقى. ويشمل هذا الباب تطبيقات كثيرة. وهذا الباب تم تقديمه بإسلوب مختلف عن ماسبقونا لسهولة التعامل معه وفهمه الجيد وتم فيه ذكر بعض الأسرار والمفاهيم التى لم تُذكر من قبل.

الباب الثامن: القياس

وفيه ظهر التعامل مع التعامد سواء تعامد مستقيمات على مستويات أو العكس، وكيفية التعامل مع التطبيقات المعتمدة عليها. أيضا يعرض عملية الدوران وكيفية الحصول على الأطوال الحقيقية للمستقيمات والأشكال الحقيقية للمستويات.

الباب التاسع: الدائرة

هذا الباب قدم الدائرة بمنظور يخص الطالب لكى يستوعبها سريعا ويخص الأساتذة قليلى الخبرة فى المادة لمعرفة أسرار هذا الباب جيدا وسهولة التعامل مع الدائرة، وخاصة أن معظم المؤلفات السابقة لم تعطى معظمها هذا الباب حقة من ناحية الإيضاح. وفى هذا الباب تم إستغلال الأوضاع الخاصة للمستويات فى تسهيل الفهم والحصول على المعلومة الناقصة بسهولة ويسر.

الباب العاشر: الكرة

فى هذا الباب قد إجتهدنا أيضا لنوضح طبيعة الكرة وكيفية التعامل معها وكذلك علاقة الدائرة بالكرة وكذلك علاقة المستوى القاطع للكرة والمستقيمات بدائرة التقاطع.

الباب الحادى عشر: كثيرات السطوح

فى هذا الباب تم شرح المادة العلمية وتقديمها بشكل يبعث على الفهم السريع والواضح. وتم إستعراض معظم التطبيقات على كثيرات السطوح من ناحية تمثيلها بأوضاعها المختلف ، تقاطعها مع المستويات، إظهار مضلعات التقاطع، نقاط تقاطع المستقيم مع كثيرة السطوح، ثم أخيرا إفراد كثيرات السطوح والحصول على شكل أوجهها ومضلعات التقاطع معها الحقيقية.

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

الباب الثانى عشر:

وفيه النظريات الهامة فى الهندسة المستوية والهندسة الفراغية والتى سنعتمد عليها فى كثير من العمليات الخاصة.

هذا الجزء من المؤلف هو الجزء الأول من الكتاب والذى تجاوز إعداده أربع سنوات حيث قمت شخصــيا بالتــأليف والكتابة والرسم بإستخدام الحاسب الألى، لذلك أرجو من الله أن يكون عونا للطلاب ونحاول الأن الإعداد للجزء الثانى من هذا الكتاب وإضافة مالم يتم شرحه فى هذا الجزء.

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

الباب الأول

التمهيد

التمهيد

الهندسة الوصفية

علم الهندسة الوصفية هو علم يهتم بإسقاط مكونات الأجسام سواء النقطة أو المستقيم أو المستوى بأوضاعها الخاصة والعامة وكذلك تعاملهم مع بعض من ناحية التوازى والتعامد والتقاطع وتكون الأجسام وإفرادها وتقاطع الأجسام مع بعضها وغيره من التعاملات بينهما.

الرموز المستخدمة

يتم فى هذا العلم إسقاط كل من النقاط والمستقيمات والمستويات، لذلك سنستخدم رموز خاصة للتعبير وتمثيل كل منهما كالأتى:

بالنسبة للنقاط: نستخدم الحروف الإنجليزية الكبيرة .... **A,B,C,D,**

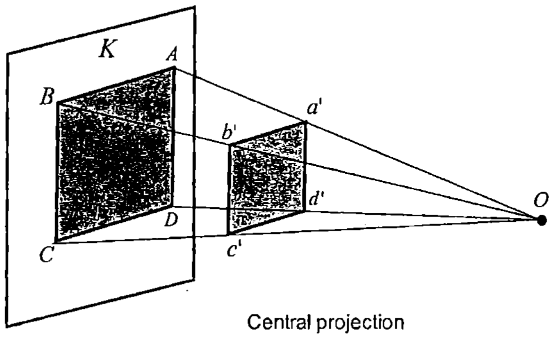
بالنسبة للمستقيمات: نستخدم الحروف الإنجليزية الصغيرة .... **a,b,c,d,e,f,**

بالنسبة للمستويات : نستخدم الحروف ... $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \lambda, \pi, \psi, \eta, ...$

طرق الأسقاط المختلفة

الإسقاط المركزى

هو أكثر أنواع الإسقاط توضيحا للمجسمات الطبيعية وفيه نتصور إسقاط الجسم من نقطة ثابتة فى الفراغ **O** تسمى مركز الإسقاط ويكون المستوى رأسيا ويسمى مستوى الإسقاط *k* ويكون الخط الواصل بين أى نقطة فى الفراغ مثل **A** ومركز الإسقاط **O** تسمى شعاع الإسقاط الخاص بالنقطة **A** وهذا الشعاع يلاقى المسنوى فى **a¯** والتى تسمى المسقط المركزى للنقطة **A** . ويوضح الشكل المقابل الإسقاط المركزى للنقاط **A,B,C,D** ويعتبر هذا النوع من الإسقاط الأكثر إستخدام فى مجال العمارة حيث يحاكى الصورة التى ترى بها العين الجسم.

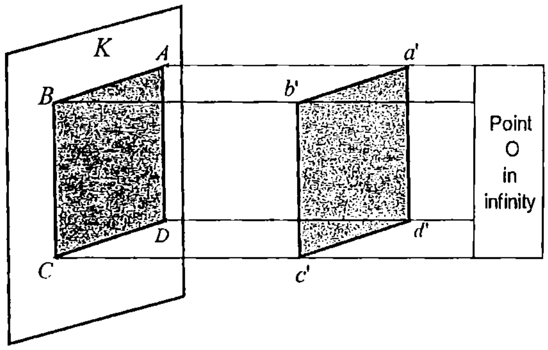


Central projection

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

الإسقاط المتوازى

فى هذا النوع من الإسقاط تتوازى أشعة الإسقاط ويستخدم هذا النوع من الإسقاط فى تعيين الظلال لأن الأشعة المنبعثة



من مصدر الضوء الكونى مثل الشمس أو القمر يُعتبر على بعد لانهائى وتكون متوازية وهى التى تعين إتجـــاه الإضاءة فى مسائل الظلال والشكل المقابـــل يوضـــح الإسقاط المتوازى للشكل الرباعى **ABCD** علـــى المستوى **k** ينتج إسقاط هذا الشكل **abcd** .

الإسقاط العمودى (الإسقاط المرقوم أو الرقمى)

فى هذا النوع من الإسقاط يتم الإسقاط على مستوى واحد فقط ويستعمل بصفة عامة فى خرائط المساحة الطبوغرافية والتى يمكن بواسطتها تمثيل سطح الأرض الغير منتظمة

الإسقاط الإكسونومترى

هو إسقاط متوازى على مستوى مائل على الإتجاهات الرئيسة (الإحداثيات الثلاثة **X,Y,Z**)

الإسقاط العمودى (مونج)

فهو أسهل وأبسط طرق الإسقاط فى تحديد الأبعاد الطبيعية والأشكال الهندسية ويعتبر أكثر الأنواع السابقة إقتصادا وتوفيرا فى الوقت

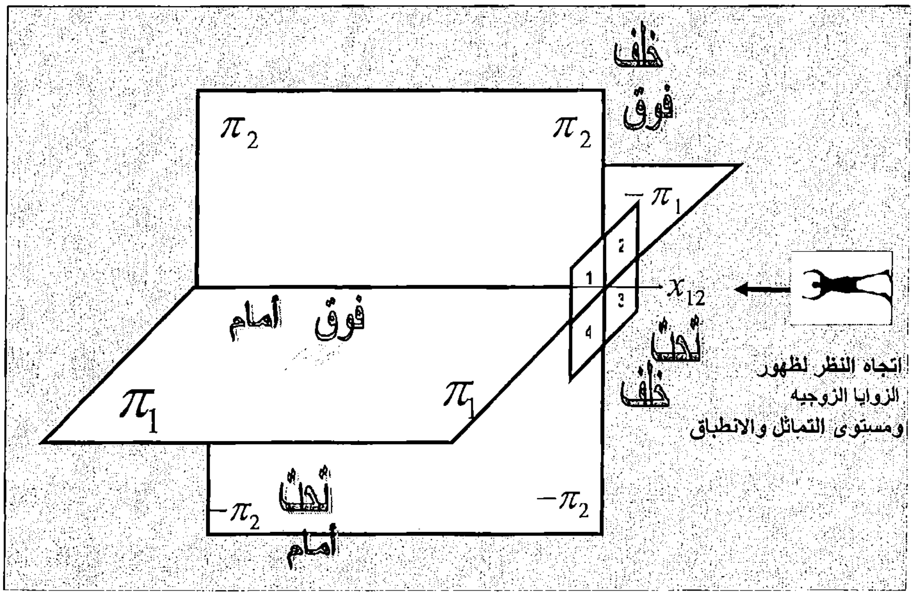
الباب الثانى

الإسقاط العمودى

الإسقاط العمودى

مبادئ الإسقاط

يعتبر العالم الفرنسى جاسبار مونج أول من وضع أسس الإسقاط العمـودى (1746-1818) ، لـذا سمي الإسقاط بإسقاط مونج نسبة إليه.

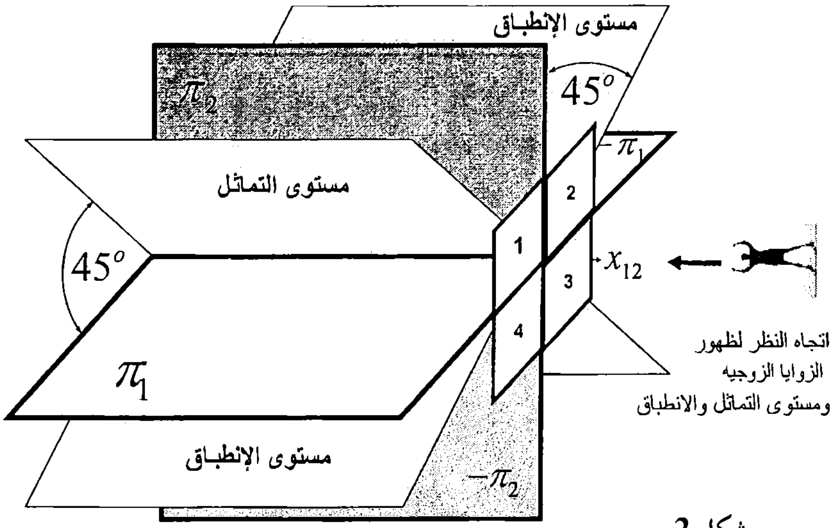


فى هذا النوع من الإسقاط نستعمل مستويين متعامدين للإسقاط أحدهما أفقـى ويعـرف بالمسـتوى الأفقى π_1 ، والأخر رأسى ويعرف بالمستوى الرأسى π_2 وخط تقاطعهما يسمى خط الأرض X، شـكل 1. وبهذا الشكل عندما يمتد كل من المستويين لمالا نهاية فإنهما يقسما الفراغ لأربع فراغات متساوية ويطلـق عليها الزوايا الزوجية. الزاوية الزوجية الأولى وتقع أمام المستوى الرأسى وفوق المستوى الأفقـى 1 ∟، الزاوية الزوجية الثانية وتقع خلف المستوى الرأسى وفوق المستوى الأفقى 2 ∟، الزاوية الزوجية الثالثـة وتقع خلف المستوى الرأسى وتحت المستوى الأفقى 3 ∟، الزاوية الزوجية الرابعة وتقع أمـام المسـتوى الرأسى وتحت المستوى الأفقى 4 ∟ كما هو واضح فى الشكل 1.

يجب أن نعلم أن الجزء من المستوى الأفقى الموجود أمام المستوى الرأسى هو المسـتوى الأفقـى الموجب π_1 ، بينما الجزء من المستوى الأفقى الموجود خلف المستوى الرأسى هو المستوى الأفقى السالب $-\pi_1$. وكذلك بالنسبة إلى جزء المستوى الرأسى الموجود فوق المستوى الأفقى فهو الجزء الموجب مـن المستوى الرأسى π_2 ، أما جزء المستوى الرأسى الموجود تحت المستوى الأفقى فهو الجزء السالب مـن المستوى الرأسى $-\pi_2$.

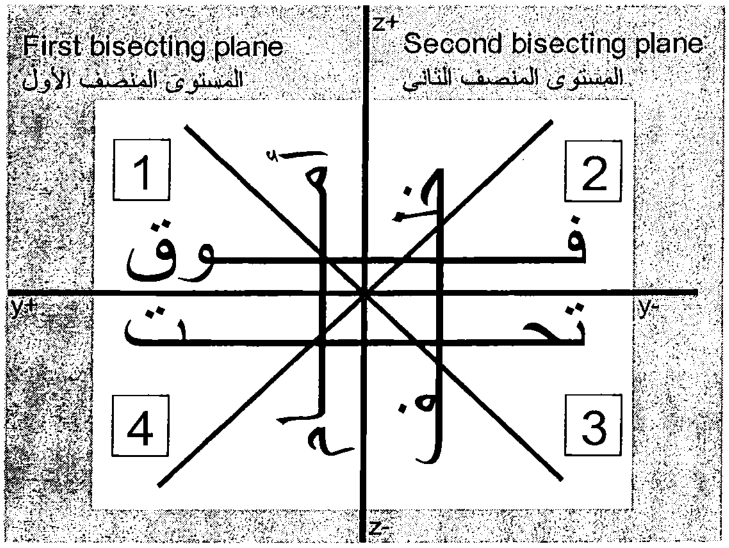
يجب أن نلاحظ فى الشكل الموضح شكل 2 أن الزوايا الزوجية التى تحـدثنا عنهـا يتعامـل معهـا مستويات أخرى مثل المستوى المنصف الأول وهو يسمى مستوى التماثل وهو مستوى يمر بين المستويين

الرأسى والأفقى ويميل عليهما ميل متساوى بقيمة 45^o وينصف الزاوية الأولى والثالثة.وكذلك المستوى المنصف الثانى وهو يسمى مستوى الإنطباق وهو مستوى يمر بين المستويين الرأسى والأفقى ويميل عليهما ميل متساوى بقيمة 45^o وينصف الزاوية الثانية والرابعة، وقد سمى الإنطباق لأنه هو الذى ينطبق عليه كل من المستويين الأفقى والرأسى كما تحدثنا سابقا حتى ينطبقوا ويتم الإعتماد عليهم فى وصف الفراغ ثلاثى الأبعاد داخل مستوى الورقة ذات البعدين.



شكل 2

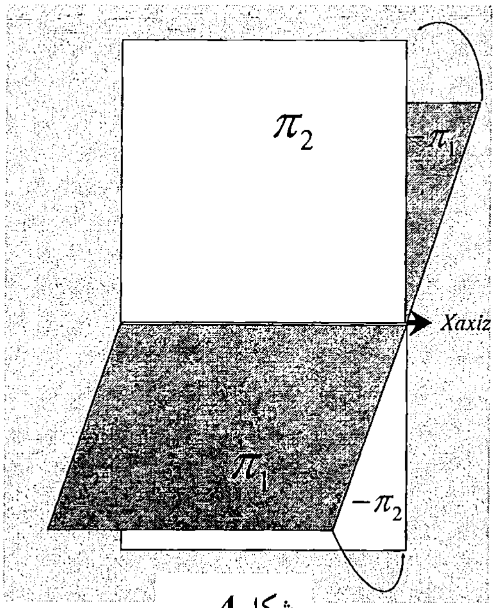
وعند النظر فى الشكل 2 عموديا على خط الأرض فإن خط الأرض يظهر نقطة فى شكل 3 وتظهر هذه المستويات خطوط تُنصف الزوايا بين مسقطى كل من المستوى الأفقى والرأسى كما فى شكل3 وتظهر الزوايا الزوجية كاملة وكذلك أوضاع مستويات التماثل والإنطباق بالنسبة للمستويين الرأسى والأفقى وهذا ما سنتحدث عنه فى إسقاط النقطة وكذلك يتضح أيضا فى إسقاط المستوى.



شكل 3

وتبقى المشكلة فى كيفية التمثيل الفراغى لمستويات الإسقاط على ورقة لاتملك سوى بعدين. هذه المشكلة يمكن حلها بإحداث إنطباق لمستويى الإسقاط على بعضهما شكل 4 حيث يتم دوران كل من

المستويين الأفقى الرأسى حول محور X فينطبق الجزء الموجب من المستوى الرأسى على الجزء الســالب من المستوى الأفقى والعكس صحيح كما فى شكل 4.



شكل 4

كما تعلمنا سابقا أن الفراغ محدود بثلاث محــاور x, y, z وهذة المحاور تشكل ثلاث مســتويات متعامــده ناتجه من إتحادهما كما فى شكل 1 ، لــذا تــم إضــافة المستوى العمودى الجانبى وهو عمودى على كــل مــن المستويين الأفقى والرأسى. ومن وضع المستوى الجديــد أصبح الفراغ مقسم لثمانى أجــزاء ، حيــث كــل زاويــة زوجية مقسمة لجزئين أحدهما موجب والأخر سالب. نجد إتحاد محورى x و y يكونا المســتوى الافقــى والــذى يرمز له بالمستوى π_1، وإتحاد z x يشــكل المســتوى الراسى π_2، أما إتحاد y وz يشكل المستوى المتعامــد عليهما وهو المستوى الجانبى π_3 ويتضح ذلك من شكل 1.

ومن طبيعه المستويات الثلاثه المتعامده نجد أن المستوى π_1 يتقاطع مع π_2 فى خط يســمى X وهو ناتج من تقاطع 1 مع 2 لذلك يسمى X_{12}، وايضا π_2 يتقاطع مع π_3 فى خط يسمى Z وهو ناتج من تقاطع 3 مع 2 لذلك يسمى Z_{23}، وايضا π_1 يتقاطع مع π_3 فى خط يسمى Y وهو ناتج من تقــاطع 3 مع 1 لذلك يسمى Y_{13}. هذه الخطوط تسمى المحاور الكرتيزيه والخط X_{12} يسمى خــط الأرض وهــو الذى يظل بهذا التعريف لأن هناك خطوط أرض أخرى ستظهر بعد ذلك تأخذ أرقام أخرى أما كل من y و z فلن نحتاج لأرقام مرافقه لهما لأنه لن يتواجد مثيل لهما بعد ذلك .

وتتضح طبيعه المستويات الثلاثه المتعامده مع إمتدادها فى شكل 5 حيث تتمدد المستويات لتعطــى كل أبعاد المستويات وتقاطعها. فمثلا إذا رمزنا للأرض بأنها المستوى الأفقى فهذا يعنى أن لها فوق وتحت " فهناك أشياء فوق الارض و أشياء تحتها" ونجد أن المستوى الأفقى"الأرض" مكوناتــه X,Y وبالتــالى الإتجاه فوق وتحت تعنى الإتجاه Z المتعامد علي مكونات المستوى شكل 5.

ومن شكل 2 أيضا نجد المستوى الرأسى المكون من X,Z يمكن أن يطلــق عليــه الحــائط أى الحــائط الموجود بالمنزل فنجد أناس تجلس أمام الحائط وأناس خلف الحائط وبالتالى معنى أمام وخلف أنه الاتجــاه y وهو الاتجاه العمودى على مستوى الحائط .

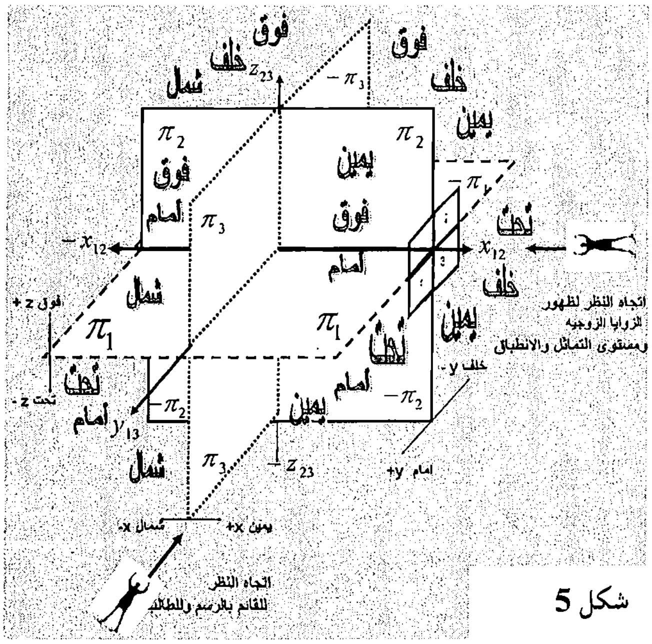
أما الفرد الموجود فى شكل 5 والذى ينظر فى إتجاه المستوى الجانبى فله يمين وشمال لهــذا المســتوى الجانبى π_3 وهذا المستوى مكوناته Y, Z وبالتالى يمين وشمال هذا المستوى هو الإتجاه العمودى

عليهم وهو x. وبالتالى يمكن وصف أى نقطه من خلال ماتم استعراضه، أن تكون نقطه فوق π_1 وأمام π_2 وعلى يمين π_3. وتبعا لعلم الكلام فإنه يمكن وضع جدول-1 الذى يوضح معنى اشارات النقاط حسب أوضاعها بالنسبه لمستويات الاسقاط .

جدول 1	π_3	π_2	π_1
الوصف ←	الفرد	الحيطه	الأرض
+ ←	يمين	أمام	فوق
- ←	شمال	خلف	تحت
البعد ←	X	Y	Z
تقع فى أى مستوى	X=0	Y=0	Z=0

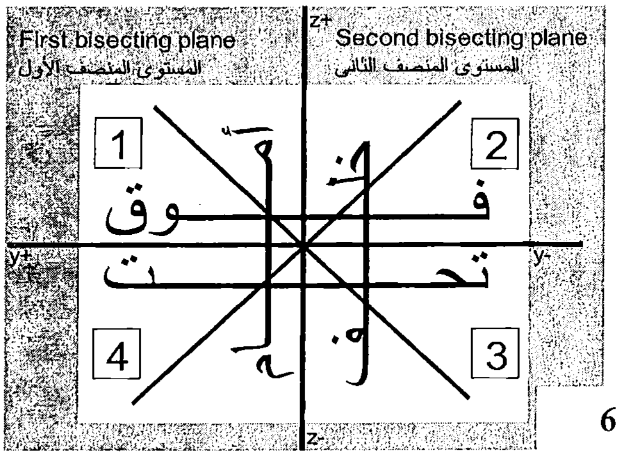
أيضا يتضح أن المستويين الأفقى π_1 والرأسى π_2، والجانبى بعد أن قسما الفراغ الى أربع زوايا زوجيه عند النظر من أقصى اليمين على شكل 5 نجد أن شكل 6 يوضح الأتى:

الزاويه الزوجيه الأولى +y و+z ،
الزاويه الزوجيه الثانيه −y و+z،
الزاويه الزوجيه الثالثه +y و−z
الزاويه الزوجيه الرابعه −z و +y ومن إتجاه النظر المحدد فى شكل 5 يمكن إسقاط شكل الزوايا والمحاور لتحديد الأربع زوايا الزوجيه شكل 6. ومن هنا يجب تعريف الاتى:

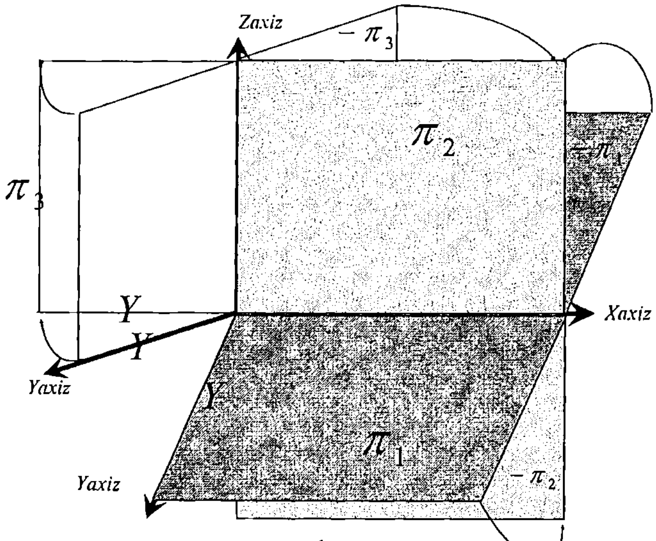


شكل 5

- المستوى المنصف الأول "مستوى التماثل" وهو الذى ينصف الزاويه الزوجيه الأولى والثالثه وفيه $z= +y, \ -z = -y$ + شكل 6، 2.
- المستوى المنصف الثانى "مستوى الانطباق" الذى ينصف الزوايا الزوجيه الثانيه والرابعه وفيه $+y= -z, \ -y=+z$ شكل 2، 6.



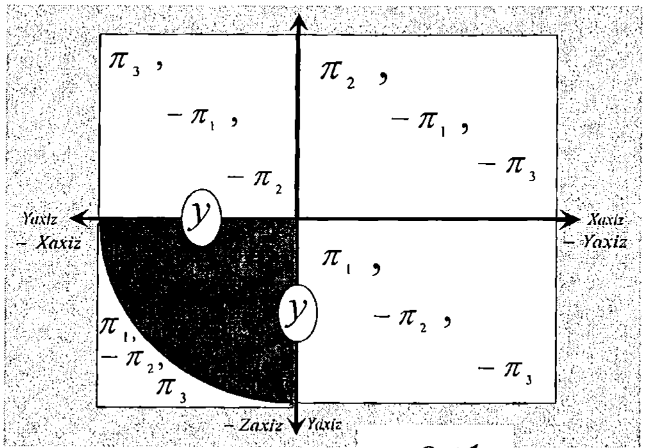
شكل 6



شكل 7

مــن شــكل 5 يتحــدد طبيعــه المستويات الثلاثه العموديه ولكن هم الأن فى الفراغ، لذا كيف يتم توقيــع النقــاط الفراغيه كما فى الأشــكال 2,5,1 داخــل مستوى الورقه؟ إجابــه هــذا الســؤال تحتاج الى أن ننظر إلى شكل 5 جيدا ثــم يتم عمل الأتى:

1. نحاول أن نقطــع المحــور y_{13} وما يماثله فى الخلف إلى خطين متوازيين كما فى شكل 7 .
2. ندور بالمستوى الأفقى عكس عقارب الساعه فينطبق الجزء السالب الخلفى من المستوى الأفقى $-\pi_1$ على الجزء الموجب العلوى من π_2 والعكس صحيح فى النصف السفلى حيث ينطبق الجزء الســالب السفلى من المستوى الرأسى $-\pi_2$ على الجزء الموجب الأمامى من π_1 وكل ذلك الدوران يتم حــول محــور x_{12} مــن خــلال محــور الإنطباق الــذى ينصــف الزاويــه الثانيه والرابعه. بعد زلك يتم دوران المســتوى الثالــث العمــودى π_3 حــول محــور Z_{23} مــع عقــارب الســاعه الــى أن ينطبــق علــى المستويين الباقيين فيتنج شــكل 7 من شكل 8 وتتضح الصوره كاملــه ويظهر أماكن المستويات السالبه والموجبه.



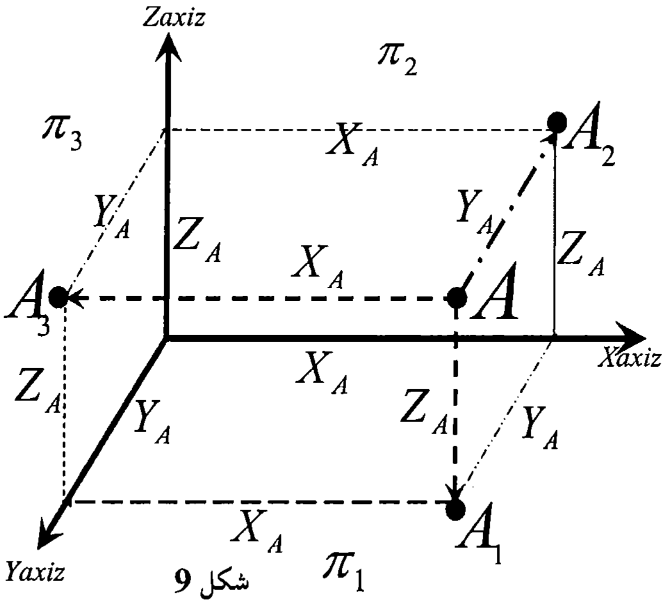
شكل 8

الباب الثالث

النقطة

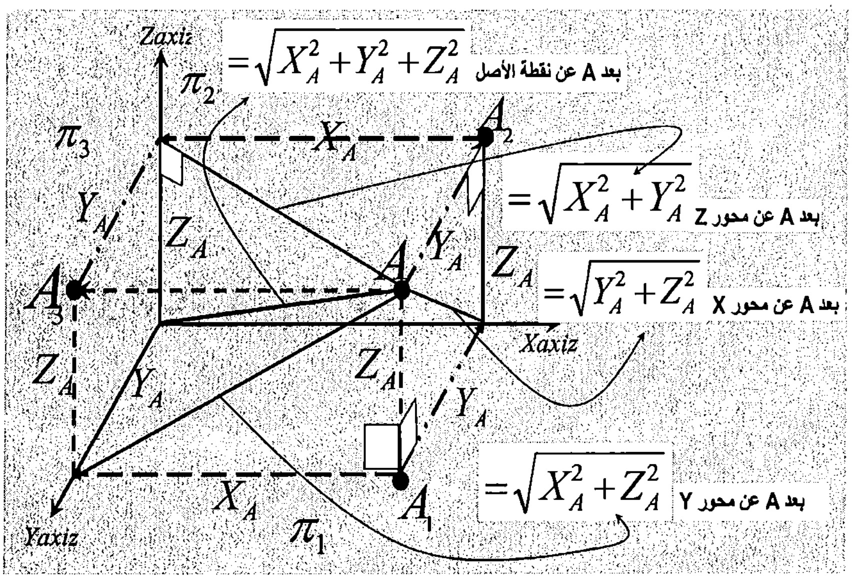
النقطة

تمثيل النقطة فى الفراغ



شكل 9

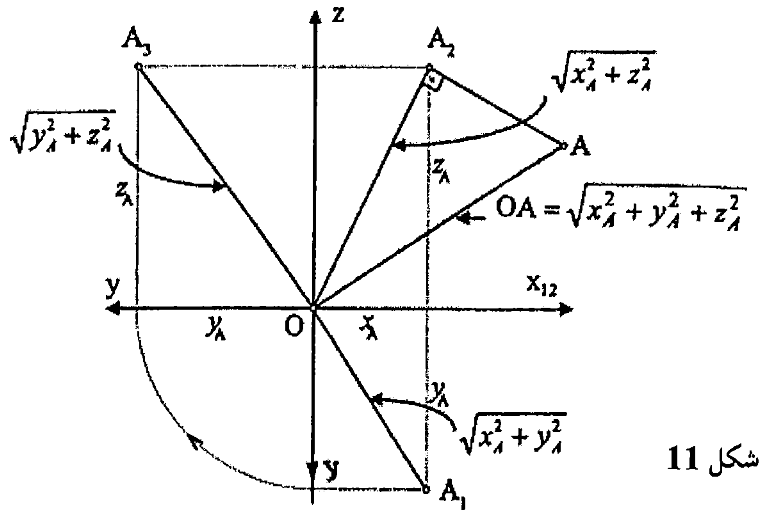
يتم تمثيل الإسقاط "للهندسة الوصفية" فى الفراغ على أحد أركان الفراغ الموجبة الإحداثيات من مجمل أجزاء الإسقاط شكل 9 ، وهو الذى يشمل الأبعاد الموجبة لكل من المحاور الثلاثة X,Y,Z وبالتالى يتم الإسقاط على المستويات العامة التى تكونها هذه المحاور. لذا نجد أن أى نقطة A فى الفراغ لو تم النظر عليها فى الإتجاه العمودى على أى مستوى ينتج مسقط لها " أى ظل عمودى أو صوره لها" هذا المسقط يسمى بإسم النقطة ورقم المستوى الذى تم النظر عليه. فإذا نظرنا عمودى على المستوى الأفقى فإن النقطة A ينتج لها ظل أو مسقط على المستوى الأفقى يسمى المسقط الأفقى للنقطة ويكون حينئذ هذا المسقط فى π_1 أى يأخذ إسم النقطة مع رقم المستوى الواقع فيه فيكون A_1 وكذلك المسقط فى المستوى الرأسى يكون A_2 وايضا فى المستوى الجانبى يكون A_3. شكل 9.



شكل 10

مثال: عين بعد نقطة $A=(2,3,5)$ عن كل من : محور X ، محور Y ، محور Z ، نقطة الأصل

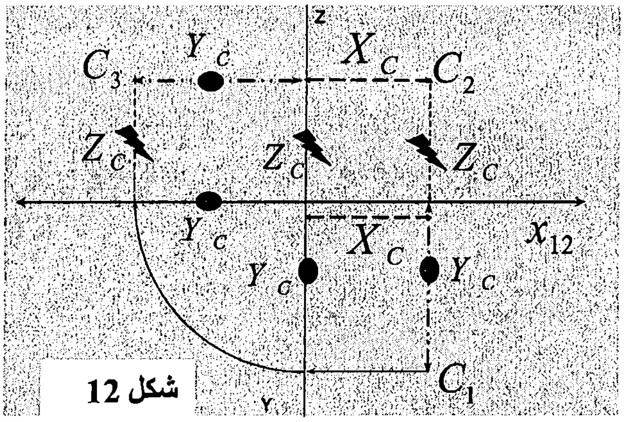
الحل: شكل **10** و شكل **11**



شكل **11**

التمثيل الوصفى للنقطة

نستخدم الحروف اللاتينية الكبيرة للرمز للنقاط مثل (**A,B,C,D,.....**). وتمثيل النقطة **C** الواقعة فى الفراغ وصفيا يتم من خلال مساقطها الثلاثة على المستويات الثلاثة من خلال بيانات النقطة (X_C,Y_C,Z_C) :



شكل **12**

أولا : من نقطة الاصل نوقع قيمه X_C على المحور X_{12}، فاذا كانت قيمه X_C موجبه يكون القياس ناحيه اليمين واذا كانت سالبه يكون القياس ناحيه اليسار شكل **12**.

ثانيا : من نهايه قياس $\underline{X_C}$ يتم توقيع البعد Y_C، فاذا كانت Y_C موجبه فأنها توقع لاسفل فى إتجاه محور **Y** الموجب والعكس صحيح. فيجب أن تعلم أن بعد كل الوحايد عن خط الأرض هى **y**، أى أنه طالما كان الإسم مثلا C_1 أي كان مكانه بالنسبة لخط الأرض فوق أو تحت فإن بعده عن خط الأرض هو **y** بالسالب أو بالموجب تبعا لوضعه شكل **12**.

ثالثا : من نهايه قياس $\underline{X_C}$ يتم قياس البعد Z_C وهو أيضا بنفس إسلوب قياس Y ، حيث يجب أن نعلم أن بعد كل الإثنينات عن خط الأرض هو Z أى أن طالما كان الإسم مثلا C_2 أى كان مكانه بالنسبة لخط الأرض فإن بعده عن خط الأرض هو Z سواء كان تحت "سالب" أو فوق "موجب" تبعا لوضعه شكل 12و 13و 14.

رابعا : إستنتاج المسقط الجانبى مثل C_3 يمكن أن يتم بطريقتين :

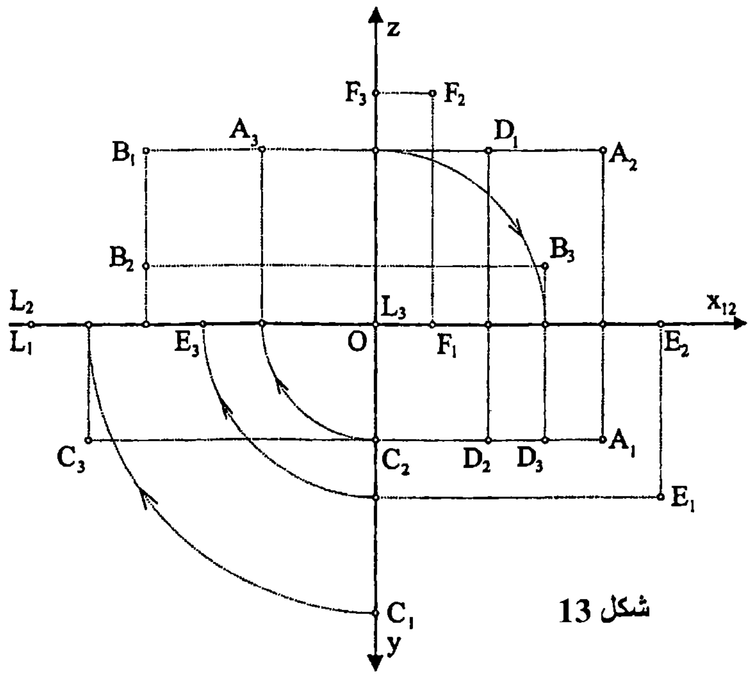
الأولى: أنها على نفس إرتفاع المسقط الرأسى للنقطة C_2 وتبعد عن محور Z مسافه Y_C فنوجد C_3 .

الثانيه : أن نعتمد على دوران البعد Y_C كما بالشكل 12 فى إتجاه الأسهم حتى يتقابل مع المناظر الأفقى للإرتفـــاع من المسقط الرأسى C_2 فينتج المسقط الثالث C_3. شكل 12

مثال: أوجد المساقط الثلاثة للنقاط الأتية :

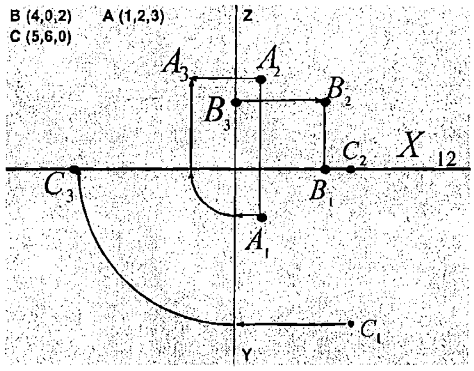
A(4,2,3), B(-4,-3,1), C(0,5,-2), D(2,-3,-2), E(5,3,0), F(1,0,4), L(-6,0,0)

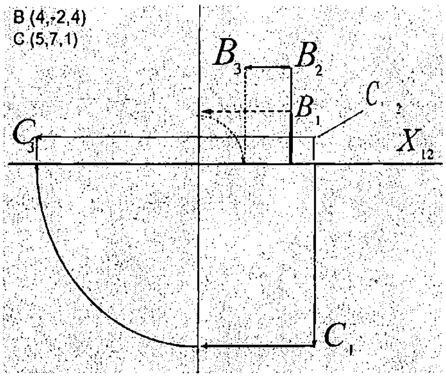
الحل: شكل 13



شكل 13

مثل النقاط الأتية: الحل: شكل 14





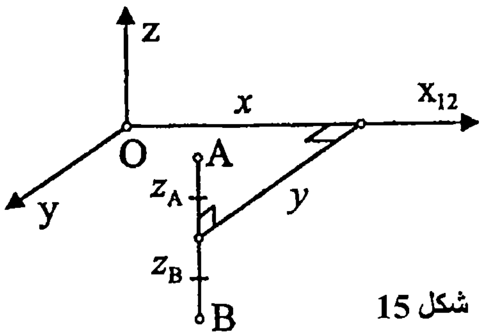
شكل 14

التماثل

- التماثل بالنسبة للمستويات: وفيه النقطة المتماثلة بالنسبة لأحد المستويات الرئيسه تتغير إشارة بعدها عن هذا المستوى فقط وباقى أبعادها عن المستويين الأخرين تظل كما هى ق شكل 15 حيث

1. النقطة المتماثلة بالنسبة الأفقى π_1 **تتغير إشارة z**

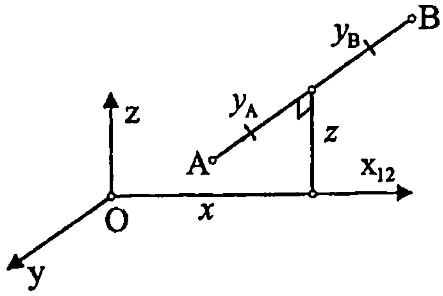
$$x_A = x_B, y_A = y_B, z_A = -z_B$$



شكل 15

2. النقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى الرأسى π_2 **تتغير إشارة y شكل 16**

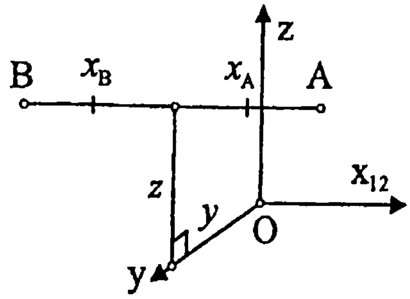
$$x_A = x_B, y_A = -y_B, z_A = z_B$$



شكل 16

3. النقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى الجانبى π_3 تتغير إشارة x شكل 17

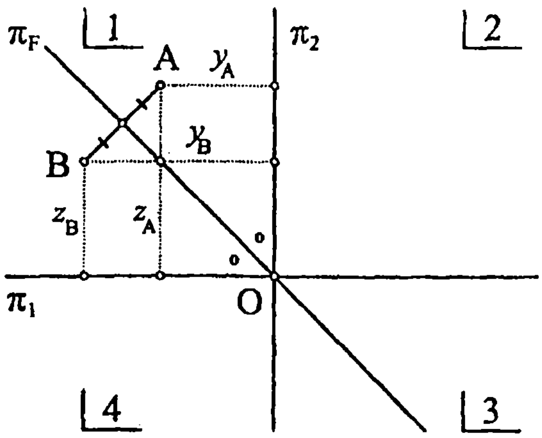
$$x_A = -x_B, y_A = y_B, z_A = z_B$$



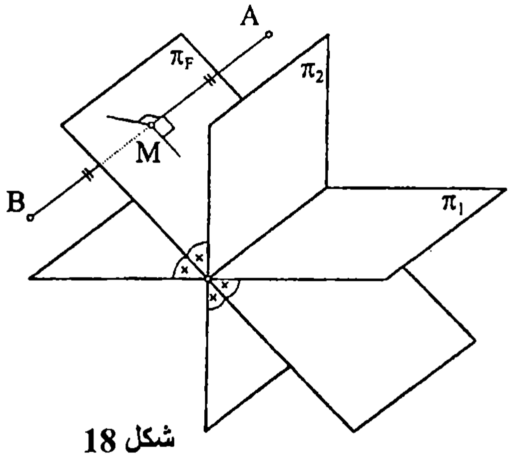
شكل 17

- تماثل النقطتين حول المستوى المنصف الأول " التماثل" شكل 18 و شكل 19

$$x_A = x_B, y_A = z_B, z_A = y_B$$



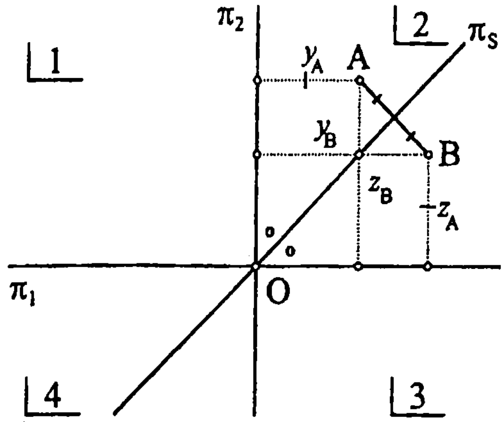
شكل 19



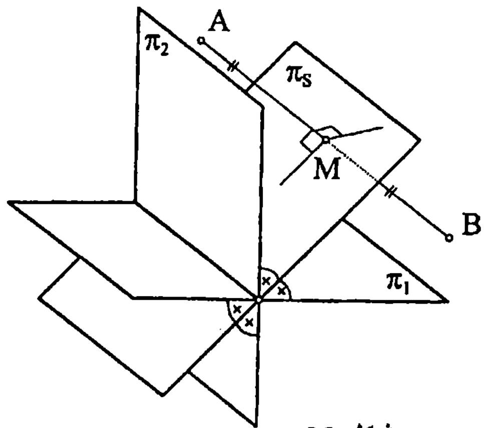
شكل 18

- تماثل النقطتين حول المستوى المنصف الثانى " الإنطباق"

$$x_A = x_B, y_A = -z_B, z_A = -y_B$$



شكل 21

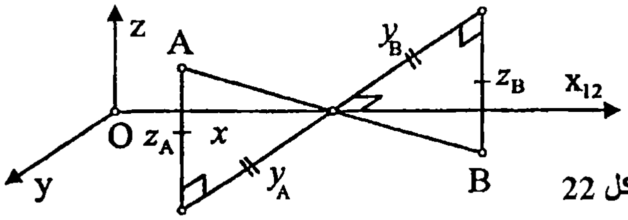


شكل 20

- التماثل بالنسبة للمحاور : وفيه تتغير إشارة أحداثياها فى إتجاهى المحوريين الأخرين فقط ويظل أحـــداثيها فى إتجـــاه المحور الثالث كماهو فى شكل 20 حيث

1. النقطة المتماثلة بالنسبة لمحور x تتغير إشارة y, z

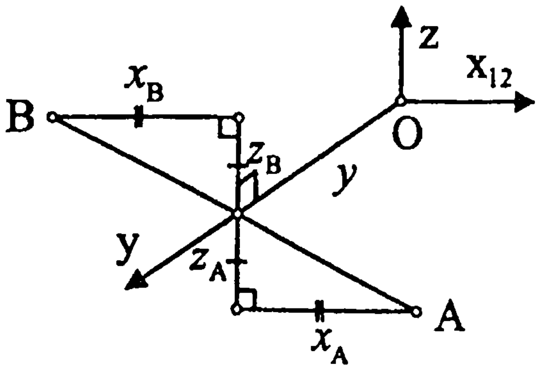
$x_A = x_B, y_A = -y_B, z_A = -z_B$



شكل 22

2. النقطة المتماثلة بالنسبة لمحور y تتغير إشارة x, z

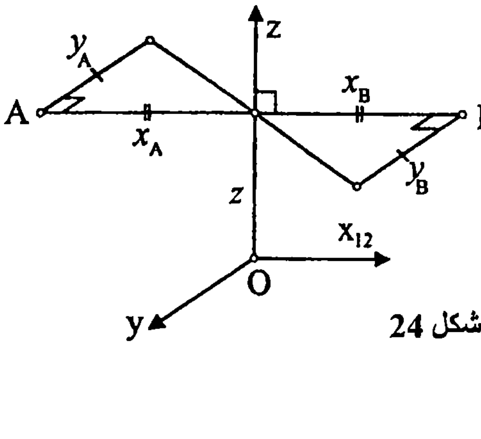
$x_A = -x_B, y_A = y_B, z_A = -z_B$



شكل 23

3. النقطة المتماثلة بالنسبة لمحور z تتغير إشارة x, y

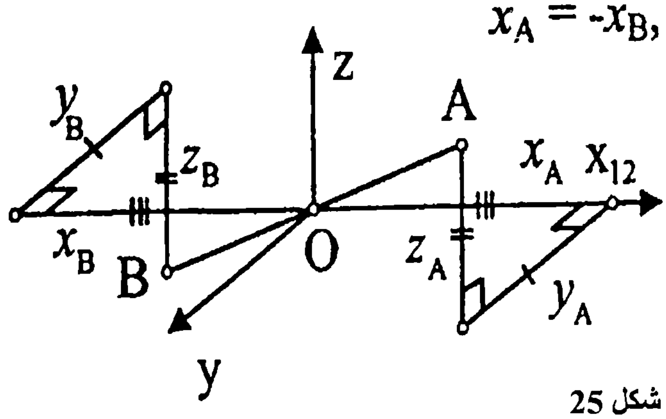
$x_A = -x_B, y_A = -y_B, z_A = z_B$



شكل 24

- التماثل بالنسبة لنقطة الأصل: تتغير إشارات الإحداثيات الثلاثة

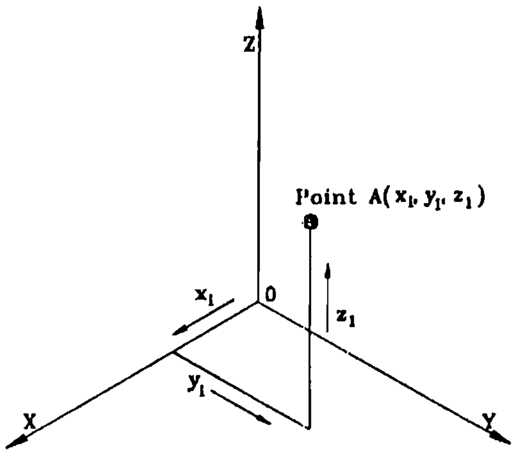
$$x_A = -x_B, y_A = -y_B, z_A = -z_B$$



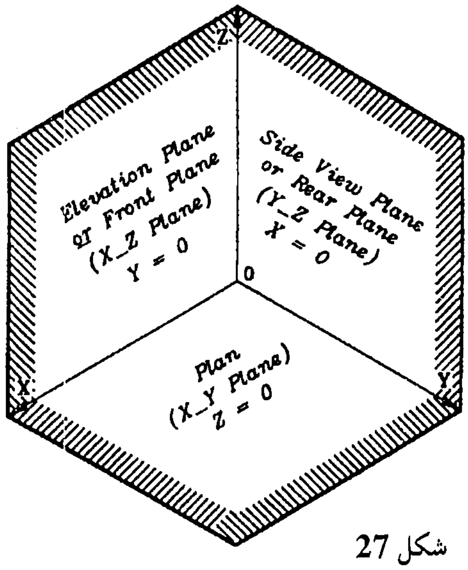
شكل 25

طبيعة الإسقاط فى الهندسة الوصفية والرسم الهندسى

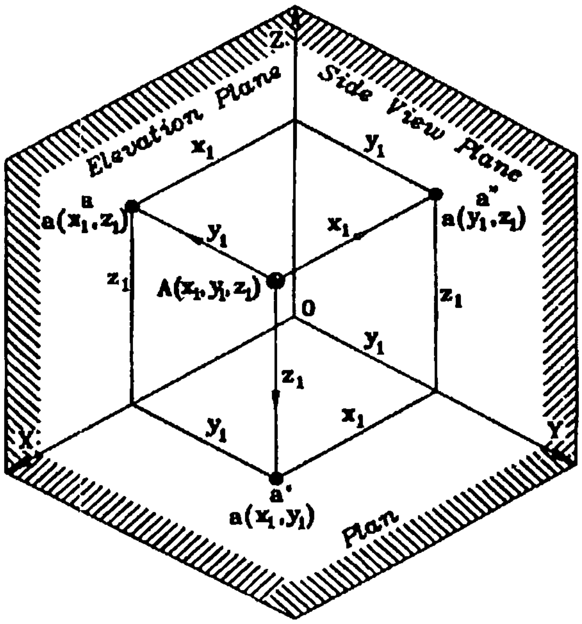
فى الهندسة الوصفية يتم أخذ الركن الموجب من الزاوية الزوجية الأولى لإفراد وإنطباق المستويات وكذلك إسقاط النقاط وهو يمين المستوى الجانبى وأمام المستوى الرأسى وفوق المستوى الأفقى. وبناء على ذلك فإن المسقط الجانبى يأتى على شمال القائم بالرسم كما يتضح فى شكل 5 ويسمى **Right side view** وهذا هو الحال فى الهندسة الوصفية. والسؤال ماذا لو تم إعتماد الإسقاط على الجزء الموجود بجواره فى نفس الزاوية الزوجية وعلى شمال المستوى الجانبى. سنجد أن المسقط الجانبى سيأتى على يمين القائم بالرسم لأننا سننظر له من ناحية يدينا الشمال وسمى هذا **Left hand side** الأشكال 26 و27و 28و29


Z
Point A(x1, y1, z1)
x1
0
z1
y1
X
Y

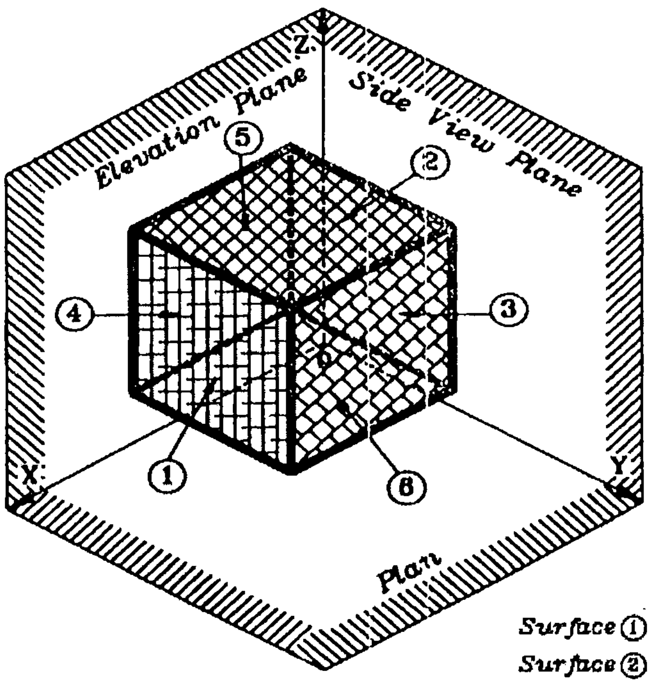
شكل 26


Z
Elevation Plane
or Front Plane
(X_Z Plane)
Y = 0
Side View Plane
or Rear Plane
(Y_Z Plane)
X = 0
0
Plan
(X_Y Plane)
Z = 0
X
Y

شكل 27



شكل 28



Surface ① X = Constant } For Y_Z Plane
Surface ② X = Constant − L

Surface ③ Y = Constant } For X_Z Plane
Surface ④ Y = Constant − L

Surface ⑤ Z = Constant } For X_Y Plane
Surface ⑥ Z = Constant − L

شكل 29

تمارين النقطة

1- عين المسقط الأفقي والرأسي لكل من النقاط الآتية:

A(4,3,2); B (3,-3,5); C (2, 4 , -6); D (5, -2,-4); E (7 , 0,-3); F(6 , 2 , 0);
G (9, -3 ,0); H (10,0,4) ; L(11,5,0) ; M (1, 3,-3); N (8,-4,4);

2- عين المسقط الأفقي والرأسي *والجانبي* لكل من النقاط الآتية:

A(4,3,2); B (3,-3,5); C (2, 4 , -6); D (5, -2,-4); E (7 , 0 , -3) ; F (-6 , 2 , 0);
G (-9,-3 ,0); H (-10,0,4) ; L(-11,5,0) ; M (-1,3,-3); N (-8,-4,4);

3- أوصف أوضاع النقاط الآتية بالنسبه لمستويات الإسقاط π_1, π_2, π_3 :

A(3,4,5) B (-2,-1,5) C (2, -2 , 3) D (-1, 2,-4) ;
E (-7 , -3 , -3) ;F (6 , 0 , 0) M (0 , 0 , 2) N (0 , -3 , 0)

4- إستنتج إحداثيات كلا من النقاط الأتية ثم مثل بالإسقاط كل من المساقط الثلاثة:

A- على يمين π_3 وتبعد عنه 2 سم وأمام π_2 وتبعد عنه 5 سم وأسفل π_1 وتبعد عنه 3 سم .

B- على يسار π_3 وتبعد عنه 6 سم وخلف π_2 وتبعد عنه 3 سم وفي π_1 .

C - على محور X , وعلى يسار π_3 وتبعد عنه 2 سم.

D- على محور Z واسفل π_1 بمسافه 2 سم .

E- على محور Y وخلف π_2 بمسافه 6 سم

F- فى π_3 وأمام π_2 وتبعد عنه 5 سم وأسفل π_1 وتبعد عنه 3 سم .

G- على يمين π_3 وتبعد عنه 6 سم وخلف π_2 وتبعد عنه 3 سم وفي π_1 .

5- عين مساقط الهرم الرباعي القائم الذي قاعدته A B C D مربعة الشكل وتقع في المستوى الافقي π_1 وأحد رؤوس المربع (? , 0.5 , 1.5) A و رأس الهرم (? , 2.5 , 3) V وارتفاع الهرم 7 سم .

6- عين مسا قط إسطوانة دائرية قائمة قاعدتها السفلى تقع في المستوى الأفقي ومركزها (? , 3.5 , 3) M وإرتفاعها 7 سم ونصف قطرها 3 سم .

7- عين مساقط مكعب A B C D EF J H وطول ضلعه 5 سم ووجهه A B C D يقع في المستوى الافقي حيث A (5,1,?) , B (8 , ? , ?) .

8- عين مسا قط مخروط دائري قائم قاعدته تقع في المستوى الرأسي ويقع أحد رؤاسمه على المستقيم L J ، حيث (2,1,5) L و (4,5,5) J وإرتفاع المخروط 7 cm .(لاحظ أن إرتفاع المخروط يُقاس طول حقيقى فى المستوى الرأسى إبتداء من خط الأرض لأن القاعدة موقعها فى المستوى الأفقى)

الباب الرابع

المستقيم

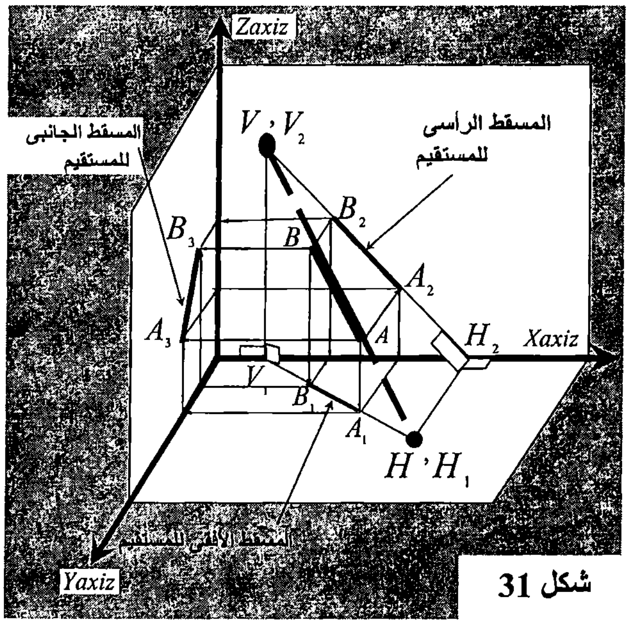
المستقيم

نجد أن أى مستقيم يتم تمثيلة إمَا بنقطتين فيكون المستقيم العام، وإما بنقطة وإتجاة فتكون الأوضاع الخاصة للمســتقيم.

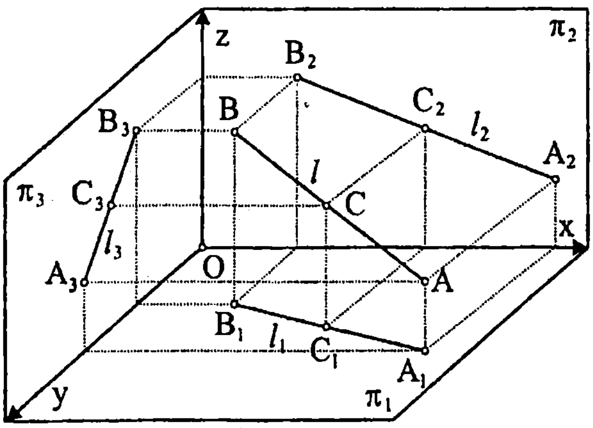
وعامة يستخدم لتمثيل المستقيمات الرموز الصغرى للغه الإنجليزيه (**a,b,c,d,e,.....**).

المستقيم العام

نجد أن لو كان هناك نقطتين **A, B** فإن الخط الواصل بينهما هو خط مستقيم، وبالتالى المسقط الواصل بين المســقطين الأفقين للنقطتين A_1, B_1 هو المسقط الأفقى للمستقيم، والمسقط الواصل بين المسقطين الرأسين للنقطتين A_2, B_2 هو المسقط الرأسى للمستقيم، والمسقط الواصل بين المسقطين الجانبيين للنقطتين A_3, B_3 هو المسقط الجانبى للمستقيم (شكل **31-32**).



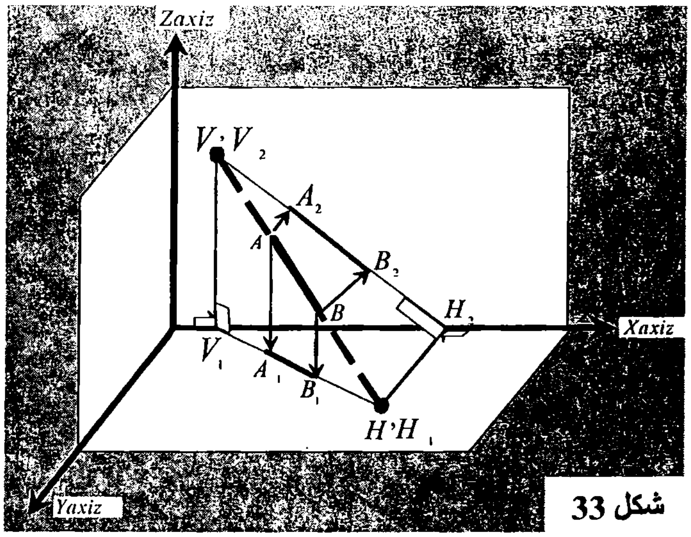
شكل 31



شكل 32

من شكل 32 نجد أن مساقط المستقيم على المستويات الثلاثة تتم بالإسقاط على المستويات الثلاثة وكذلك ترتبط مساقط النقاط على المستقيم بمساقط المستقيم.

ومن الشكلين 31 و 33 نجد أن لو تم توصيل النقطتين A,B ومد إتجاههم فإن هذا المستقيم يقطع كل من π_1، π_2، π_3 فى نقطة لكل منهما، نقطة تقاطع المستقيم مع π_1 تسمى الأثر الأفقى للمستقيم H، ونقطة تقاطع المستقيم مع π_2 تسمى الأثر الرأسى للمستقيم V. ونقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الجانبى π_3 هى الأثر الجانبى للمستقيم S، وكل من هذة النقاط لها مساقط سيتم الحديث عنها لاحقا.



شكل 33

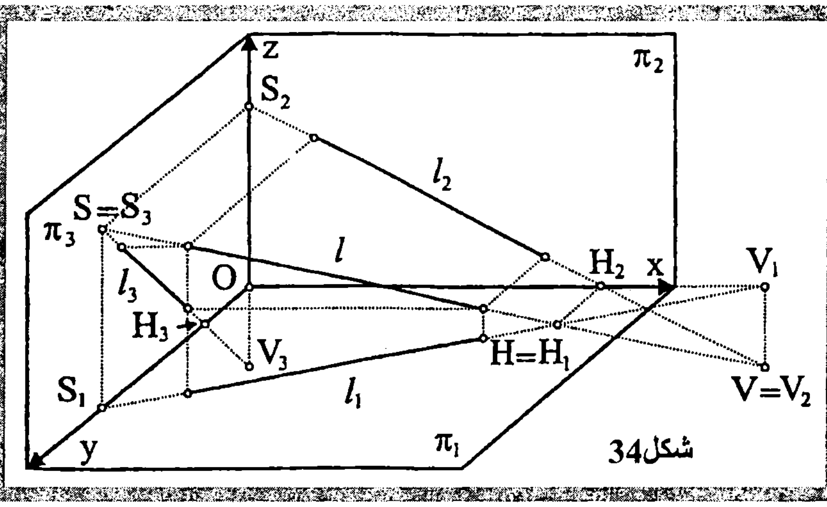
والأن نريد تعريف ماهو *الأثر للمستقيم* لأن أثار المستقيمات هى من النتائج المطلوبة دائما والتى سنعتمد عليها فى كثير من المعطيات القادمة.

والتعريف العام لأثر المستقيم *هو نقطة تقاطع المستقيم مع مستوى أسمه*، حيث أن الأثر الأفقى للمستقيم هو نقطه تقاطع المستقيم مع المستوى الأفقى، الأثر الرأسى للمستقيم هو نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الرأسى، الأثر الجانبى للمستقيم هو نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الجانبى. وتمثيل مكان الاثر الأفقى والرأسى والجانبى للمستقيم يظهر فى شكلى 31و 32 ومنهم سيتم شرح طبيعة الأثار للمستقيمات.

الأثر الأفقى للمستقيم : (Horizontal)

الأثر الأفقى للمستقيم هو نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الأفقى ويرمز له بالرمز H ، وهو كأى نقطة له ثلاث مساقط ، وهو النقطة التى تقع على المستقيم وفى π_1 وهى H_1، أى أن قيمة المسافة لها فوق π_1 هى Z_H تساوى صفر أى $Z_H = 0.0$، وطالما Z_H تساوى صفر فإنها مثل أى نقطة Z لها تساوى صفر أى مسقطها الرأسى على خط الأرض وبالتالى H_1 تقع فى π_1 على بعد Y_H من خط الأرض و H_2 تقع على X_{12} حيث $Z_H = 0.0$، والمسقط الجانبى للأثر الأفقى هو H_3 *يقع على محور Y فى المستوى الجانبى* π_3 . و يمكن الأن وضع الإحداثيات للأثر الأفقى

حيث $H(X,Y,Z)=H(X,Y,0)=H_1(X,Y)$ حيث أصل النقطة H أصبح هو نفس مكان المسقط الأفقى لنفس النقطة H_1 لأن النقطة H فى الواقع تقع فى π_1 لأن العمود الساقط منها على المستوى الأفقى=0، وعليه فلابـــد أن نعلم أنه لن يوجد H بعد ذلك لأن H تعنى أنها H_1 وإحداثياته هو X,Y ويتم تمثيله كما فى شكل 33و 34 حيث نوقع H_1 بالإحداثيات X_H, Y_H وتكون H_2 بالإسقاط المباشر على خط الأرض و H_3 تقع على محور Y الأفقى فى المسقط الجانبى.



شكل34

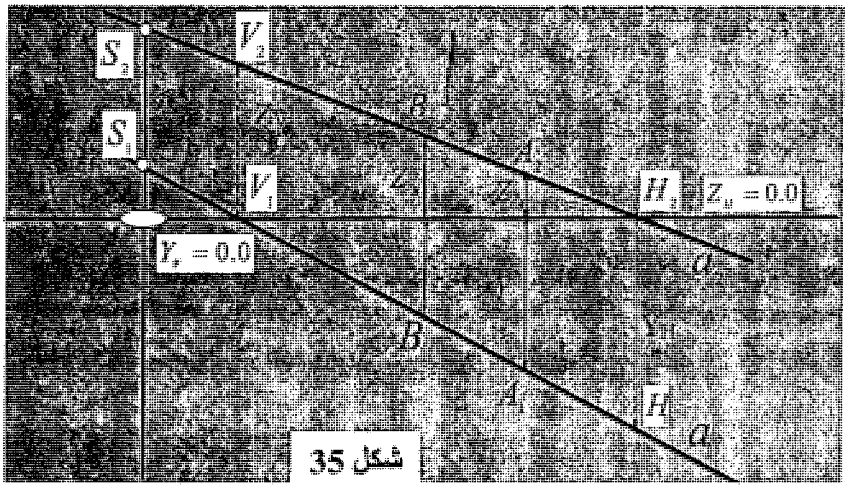
الأثر الرأسى للمستقيم : (Vertical)

الأثر الرأسى للمستقيم هو نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الرأسى ويرمز له بالرمز V شكل 34و 35، وهو كـــأى نقطة له ثلاث مساقط ، وهو النقطة التى تقع على المستقيم وفى π_2 ، أى أن قيمة Y_V تساوى صفر أى $Y_V=0.0$ لأن العمود الساقط منها على المستوى الرأسى Y_V=0، وطالما Y_V تساوى صفر فإنها مثل أى نقطة Y لها تساوى صفر أى مسقطها الأفقى على خط الأرض وبالتالى V_2 تقـــع فى π_2 علـــى بعـــد Z_V ، و V_1 تقـــع علـــى X_{12} أشـــكال 33و34و35 . يمكن الأن وضع الإحداثيات للأثر الرأسى حيث $V(X,Y,Z)=V(X,0,Z)=V_2(X,Z)$ حيـــث أصل النقطة V أصبح هو نفس مكان المسقط الرأسى لنفس النقطة V_1 لأن النقطة V أصلا تقع فى π_2 ، وعليه فلابد أن نعلم أنه لن يوجد V بعد ذلك لأن V تعنى أنها V_2 وإحداثياته هو X,Z ويتم تمثيلها كما فى شكل 34 حيـــث

نوقع V_2 بالإحداثيات X,Z وتكون V_1 بالإسقاط المباشر على خط الأرض و V_3 تقع على نفس إرتفاع V_2 ولكن مسقطها على محور **Z**.

الأثر الجانبى للمستقيم : (Side)

الأثر الجانبى للمستقيم هو نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى الجانبى ويرمز له بالرمز S، وهو كأى نقطة لـه ثـلاث مساقط كم بالأشكال **34**و **35** ويعرف بأنه النقطة التى تقع على المستقيم وفى π_3، أى أن قيمة X_S تساوى صـفر أى $X_S = 0.0$، وطالما $X_S = 0.0$ تساوى صفر فإن مسقطها الأفقى والرأسى على العمودى على خط الأرض مـن نقطة الأصل وبالتالى S_2 تقع على محور **Z** فى π_2 على بعد Z_S، S_1 تقع على محور **Y** اللرأسى فى π_1 على بعـد Y_S، $X_S = 0.0$. يمكن الأن وضع الإحداثيات للأثر الجانبى حيث $S(0,Y,Z) = S(0,Y,Z) = S_3(Y,Z)$ حيـث أصل النقطة أصبح هو نفس مكان المسقط الجانبى لنفس النقطة S لأن النقطة S أصلا تقع فى π_3، وعليه فلابـد أن نعلم أنه لن يوجد S بعد ذلك لأن S تعنى أنها S_3 وإحداثياته هو Y,Z ويتم تمثيله كما فى شكلى **34**و **35** حيـث نوقع S_3 بالإحداثيات Y,Z وتكون S_1,S_2 بالإسقاط المباشر على العمودى على خط الأرض أو العكس.

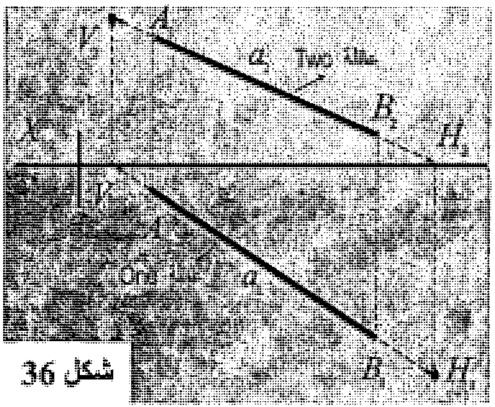


شكل 35

إستنتاج الأثار من المساقط

شكل **35** يوضح كيـف يمكن إيجاد النقاط التى تقع على المسـتقيم وتقـع فى المستوى الأفقى والرأسـى والجانبى والتى ُتستنتج بالإمتدادات الخاصه بالمساقط للمستقيم. ومن شكل **34** الذى يوضح وضع المستقيم فى الفـراغ وكذلك مساقطه يتضح فيه أوضاع الاثار كنقاط أصليه واقعة فى مستوياتها وكذلك مساقطها وكيف أن المساقط تتفاعل مع إمتداداتها مع أصل المستقيم فى الفراغ. من شكل **35** نلاحظ ان المستقيم a يقع عليه نقطة A,B وكل منهما لها Y,Z. والمطلوب إيجاد النقاط التى تقع على المستقيم وتقع فى المستوى الأفقى والرأسى والجانبى. لذا نلاحظ ان النقطة

التى تقع على المستقيم a وتقع فى المستوى الأفقى تكون Z لها تساوى صفر لذلك فاننا نبحث على المسقط الرأسى للمستقيم وهو a_2 عن النقطه التى Z لها تساوى صفر (حيث أن المساقط الرأسية هى التى تحمل القيم Z وبالتالى نبحث تقاطع المسقط الرأسى مع خط الأرض) فتكون H_2 تقع على X_{12} وبالتالى H_1 تكون بالتناظر على a_1 وتسمى هذة النقطة بالاثر الأفقى للمستقيم. لذلك تابع معى بعينيك شكل 35 و36 هذه المقولة: لو معطى المساقط للمستقيم *فإننا بديهيا لو وصلنا المسقط الرأسى حتى يقطع خط الأرض ثم أقمنا عمود حتى يقابل المسقط الأفقى فانة سيقابلة مباشرة فى الاثر الأفقى للمستقيم* H_1 . من الشكل 35 و36 نلاحظ أن النقطة التى تقع على المستقيم a وتقع فى المستوى الرأسى تكون Y لها تساوى صفر لذلك فاننا نبحث على المسقط a_1 عن هذة النقطه (حيث أن المساقط الأفقية هى التى تحمل القيم Y وبالتالى نبحث تقاطع المسقط الأفقى مع خط الأرض) فتكون V_1 تقع على X_{12} وبالتالى V_2 تكون بالتناظر على a_2 وتسمى هذة النقطة بالاثر الرأسى للمستقيم لذلك لذلك تابع معى بعينيك شكل 35 وهذه المقولة: لو معطى المساقط للمستقيم *فإننا بديهيا لو وصلنا المسقط الأفقى حتى يقطع خط الأرض ثم أقمنا عمود حتى يقابل المسقط الرأسى فإنة سيقابلة مباشرة فى الاثر الرأسى للمستقيم* V_2.



شكل 36

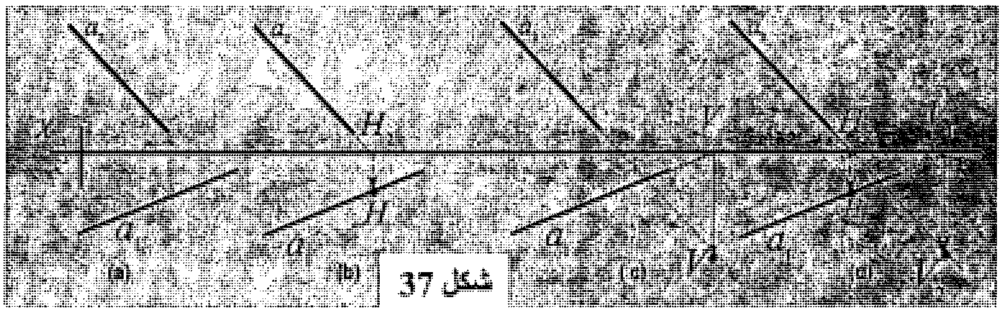
من الشكلين 34و 35 يتضح مكان S_2, S_1 وهما المساقط للأثر الجانبي عند الإحداثى $X = 0.0$. لذلك فان المعطيات بالنسبه إلى H تكون هى H_1 اى ان إحداثياها X,Y وكذلك المعطيات بالنسبه إلى V تكون V_2 اى ان إحداثياها X,Z ، وأيضا المعطيات بالنسبه إلى S تكون S_3 اى ان إحداثياها Y,Z . ويمكن تلخيص القاعده السابقة فى النتيجه الأتية بالنسبة للأثر الأفقى والرأسى:

<u>عندما يكون معطى المساقط ومطلوب الأثار</u> يتم تطبيق القاعدة [*وصل وقيم عمود*] وتطبق وتحفظ وتجــرب وأنت تقرأها كالأتى :

1. وصل المسقط الأفقى (حتى يقابل خط الأرض) قيم عمود يقابل المسقط <u>الرأسي</u> إذا هذا هو <u>الأثر الرأسي</u>. شكل 36 و 37

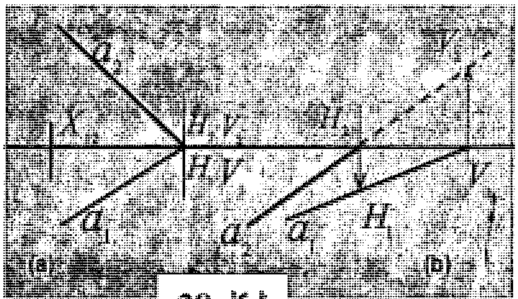
2. وصل المسقط الرأسى (حتى يقابل خط الأرض) قيم عمود يقابل المسقط <u>الأفقي</u> إذا هذا هو <u>الأثر الأفقي</u> شكل 36.

ويمكن الأن أستعراض بعض الأمثلة التى توضح إستخدام هذه القاعدة كالأتى:

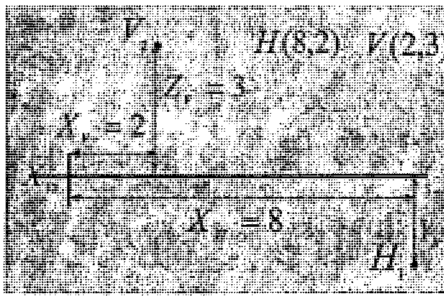


شكل 37

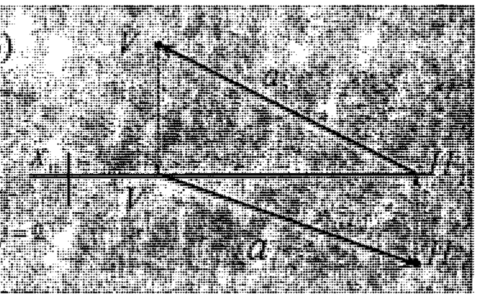
من شكل37 –a معطى مسقطين لمستقيمين ومن الشـــكل 37–b يتضح كيفية تطبيق القاعـــدة بـــنفس المنطـــوق لإستنتاج الأثر الأفقى ثم مـــن الشـــكل 37–c يتضـــح إسلوب إيجاد الأثر الرأسى والشكل 37–d يوضـــحهما معا. ومن الشكل 38– b-a يتضح كـــذلك وضـــعين أخرين لمستقيمين وكيفية تطبيـــق القاعـــــــدة لإستنتاج الأثار.



شكل 38



شكل 39 -a



شكل 39 -b

إستنتاج المساقط من الاثار

مثال: إذا علمت أن الأثر الأفقى للمستقيم a هو $H(8,2)$ والاثر الرأسى له هو $V(2,3)$ مثل المستقيم a بمساقطة.

شكل **39**. فى المثال شكل **a-39** معطى الأثر الأفقى **H** والرأسى **V** ونحن قد رأينا مما سبق أن معنى H تعنى أنها H_1 وإحداثياته هو X,Y و V تعنى أنها V_2 وإحداثياته هو X,Z وبالتالى بعد توقيع المعطيات يكون موجود H_1 و V_2 وعلية يمكن أن نسقط عمود من H_1 على خط الأرض نحصل على H_2 وبالتالى لو وصلنا H_2 ب V_2 فإننا نحصل على a_2 شكل**b−39** حيث أنها كلها تحمل رقم 2، ونسقط عمود من V_2 على خط الأرض نحصل على V_1 وعلية لو وصلنا H_1 ب V_1 فإننا نحصل على a_1 حيث أنها كلها تحمل رقم **1** شكل**b−39** .وبالتالى نستنتج القاعدة القادمة

لإستنتاج المساقط من الاثار

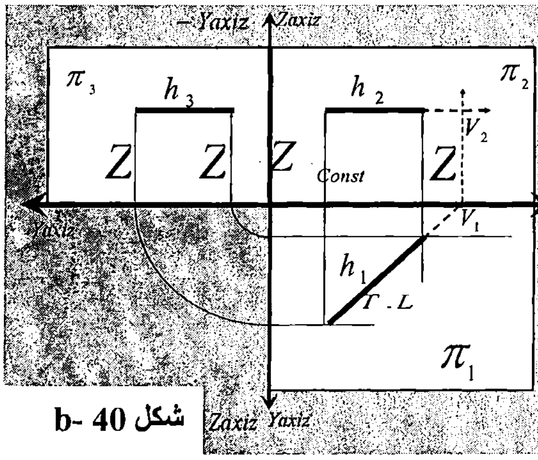
لو *معطى الأثار ومطلوب المساقط* للمستقيم نتبع القاعدة [إسقط عمود ووصل] وتحفظ وتطبق وتجرب كـالأتى مـن شكل**b−39** : من H_1 أسقط عمود على خط الأرض نحصل على H_2 و H_2 V_2 هو a_2 إذا نصـل H_2ب V_2. ومن V_2 أسقط عمود على خط الأرض نحصل على V_1 و H_1 V_1 هو a_1 إذا نصل H_1ب V_1. ولابد أن نقولها كمـا ذكرت لك وتحفظ بهذا الشكل حتى لايتم الخطأ مهما كان التطبيق صعب وذلك تبعا للأوضاع المختلفة الـتى سـتأتى لكل H_1و V_2.

الأوضاع الخاصه بالمستقيمات

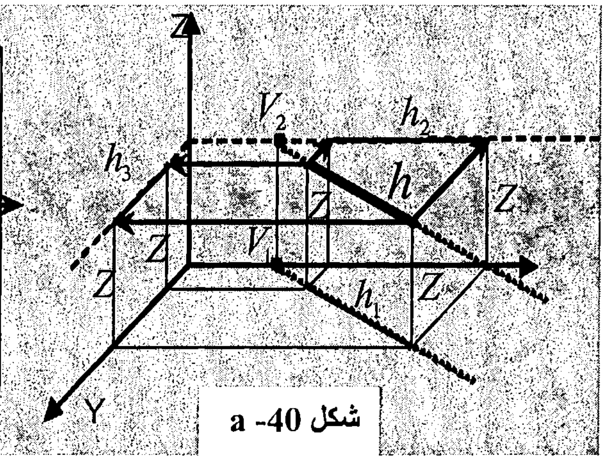
1- المستقيم الأفقى *horizontal*

المستقيم الأفقى (h) فى الفراغ يوازى المستوى الأفقى الرئيسى π_1 لذا فمميزات هذا المستقيم كثيره وهى كالأتى :

1. كل النقاط على هذا المستقيم قيمه Z لها ثابته كما بالشكل a-40
2. ، المسقط الرأسى والجانبى لهذا المستقيم يوازى خط الأرض على إرتفاع ثابت Z شكل 40- b- a
3. يظهر بطوله الحقيقى وزاويه ميله الحقيقيه (على المستوى الرأسى) فى المستوى الأفقى π_1 شكل 40 -b
4. له أثر رأسى وجانبى وليس له أثر أفقى شكل 40 -a-b



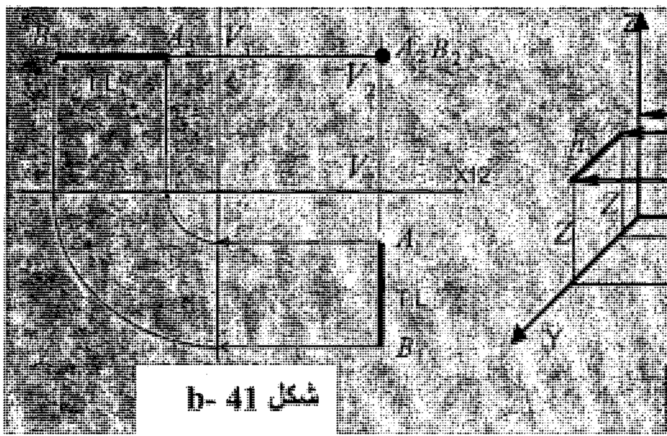
شكل 40 -b



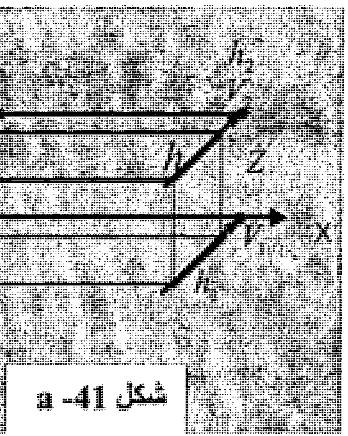
شكل 40- a

2- المستقيم العمودى على المستوى الوجهى

هو حاله خاصه من المستقيم الأفقى حيث يوازى المستوى الأفقى وعمودى على المستوى الوجهى وله كـــل مميـــزات المستقيم الأفقى ويضاف إليه أن مسقطه الرأسى نقطه فى π_2 وزاويه ميله على π_2 هى 90 درجـــه. ومـــن الشـــكل الفراغى للمستقيم الأفقـــى فإن وضع هـــذا المستقيم



شكل 41 -b



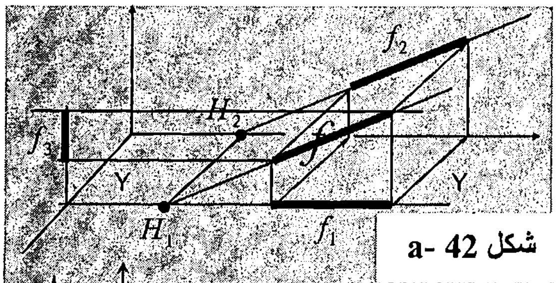
شكل 41- a

أن يكون واقع فى مستوى أفقى ولكن عمودى على المستوى الوجهى شكل b-a-41.

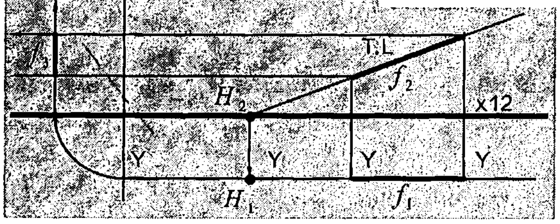
3- المستقيم الوجهى face

المستقيم الوجهى (f) فى الفراغ يوازى المستوى الرأسى الرئيسى π_2 لذا فمميزات هذا المستقيم كثيره وهى كالأتى :

1. كل النقاط على هذا المستقيم قيمه Y لها ثابته كما بالشكل a-b-42



شكل 42 -a

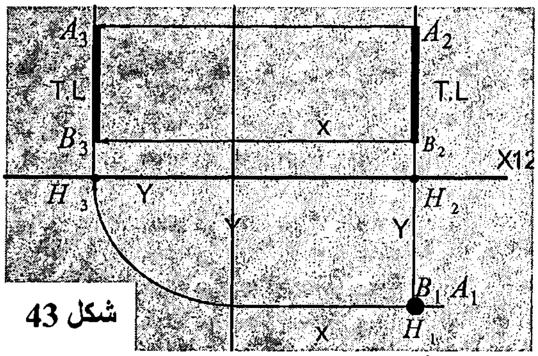


شكل 42 -b

2. المسقط الأفقى لهذا المستقيم يوازى خط الأرض على إرتفاع ثابت Y
3. يظهر بطوله الحقيقى وزاويه ميله الحقيقيه (على المستوى الأفقى) فى المستوى الرأسى

4- له أثر أفقى وجانبى وليس له أثر رأسى.

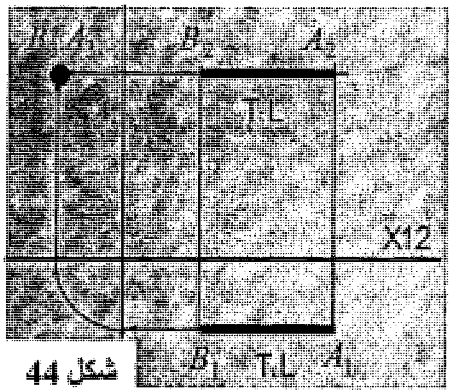
4- المستقيم العمودى على المستوى الأفقى (المستقيم الرأسى)



شكل 43

هو حاله خاصه من المستقيم الوجهى حيث يوازى المستوى الرأسى والجانبى وعمودى على المستوى الأفقى وله كل مميزات المستقيم الوجهى ويضاف إليه أن مسقطه الأفقى نقطه فى π_1 وزاويه ميله على π_1 هى 90 درجه ، شكل 43.

5- المستقيم العمودى على المستوى الجانبى / الموازى لخط الأرض



شكل 44

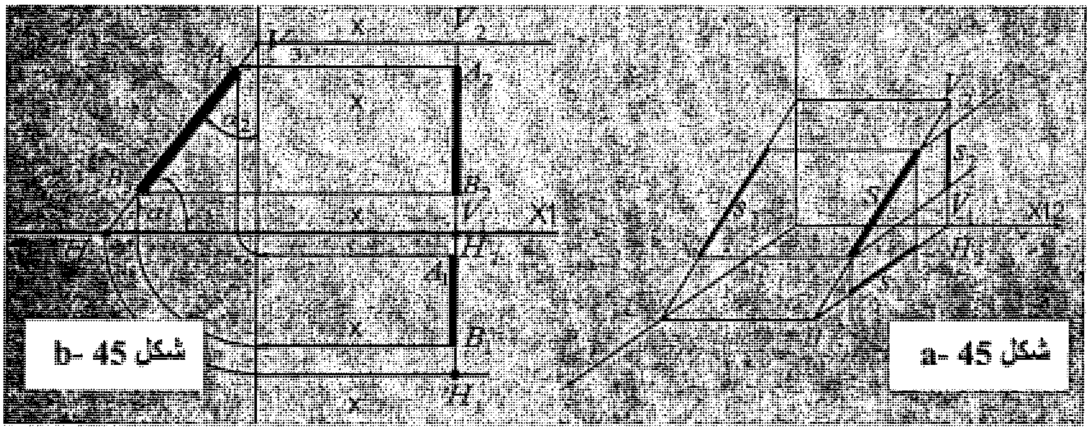
وهو حاله خاصه من كل من المستقيم الأفقى والوجهى شكل 44 ولكنه يختلف عنهم فى الأتى:

1. أنه ليس له زاويه ميل على المستويين الأفقى والرأسى حيث يوازيهم
2. مسقطيه الأفقى والرأسى يوازيا خط الأرض ويظهرا بطولهما

الحقيقى شكل 44

3. مسقطه الثالث نقطه فى المستوى الجانبى

6- المستقيم الجانبى (Side) / العمودى على خط الأرض

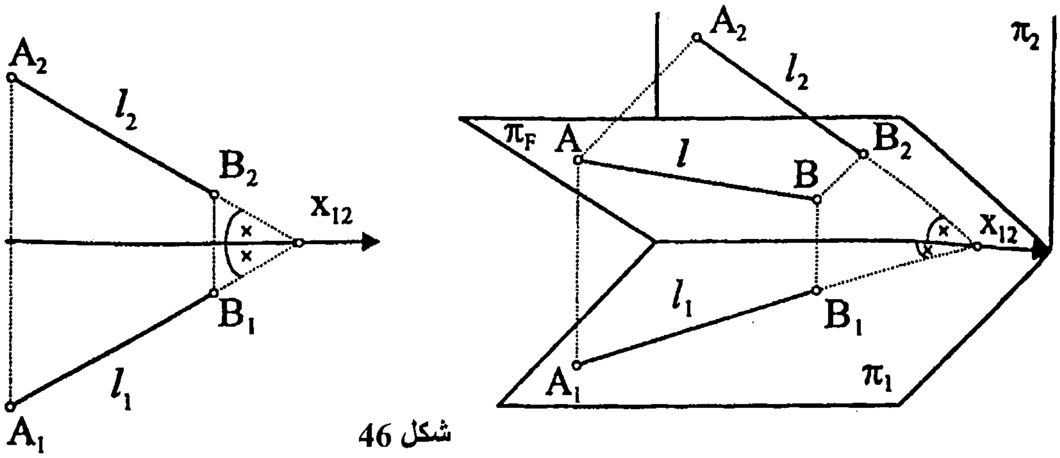


شكل 45 -b   شكل 45 -a

المستقيم الجانبى (s) فى الفراغ يوازى المستوى الجانبى الرئيسى π_3 لذا فمميزات هذا المستقيم كثيره وهى كالأتى :

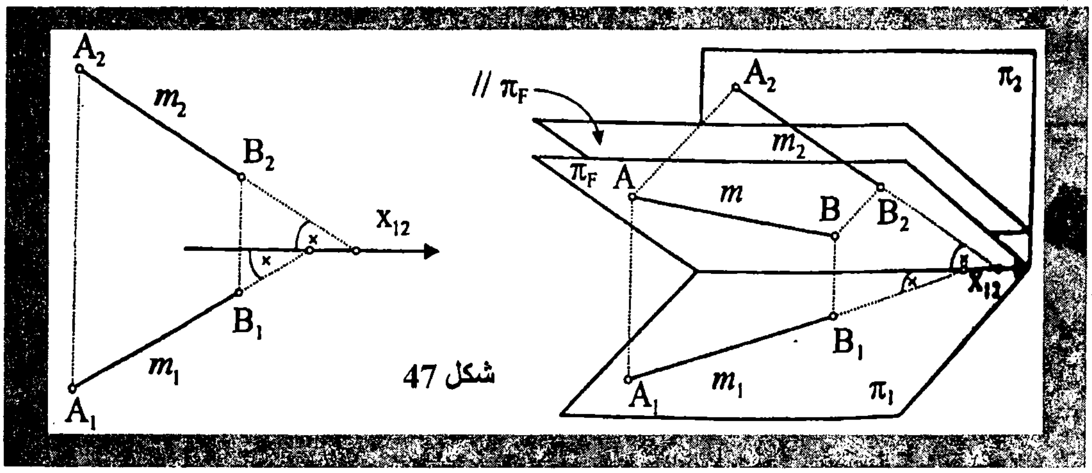
1. كل النقاط على هذا المستقيم قيمه **X** لها ثابته كما بالشكل **45– b-a**
2. المسقط الأفقى والرأسى لهذا المستقيم عمودى على خط الأرض على بعد ثابت عن نقطه الاصل قيمته **X** .
3. يظهر بطوله الحقيقى وزاويه ميله الحقيقيه (على كل من المستوى الأفقى والرأسى) فى المستوى الرأسى π_3
4. له أثر أفقى ورأسى وليس له أثر جانبى.

7- مستقيم يقع فى المستوى المنصف الأول " مستوى التماثل"



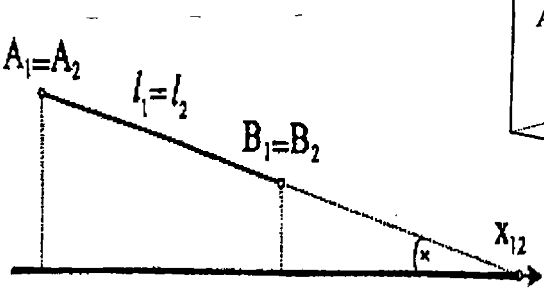
شكل 46

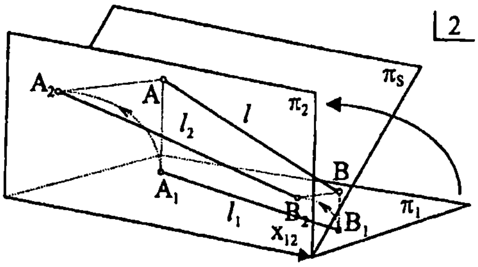
8- مستقيم يقع في مستوى موازي لمستوى التماثل



شكل 47

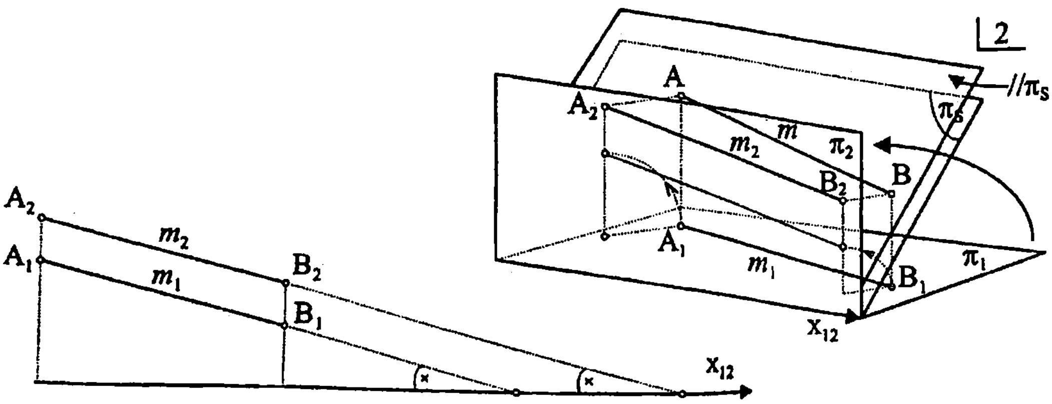
9- مستقيم يقع في المستوى المنصف الثاني " مستوى الإنطباق"





شكل 48

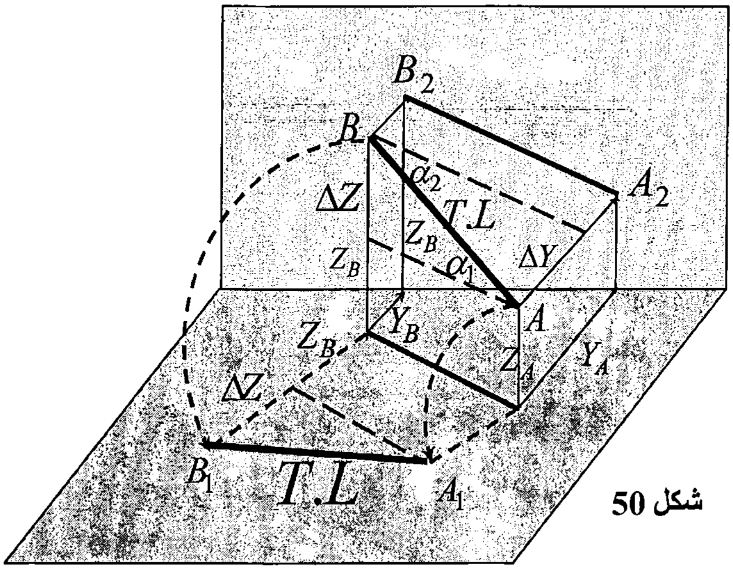
10- مستقيم يقع في مستوى موازي لمستوى الإنطباق"



شكل 49

الطول الحقيقى للمستقيم

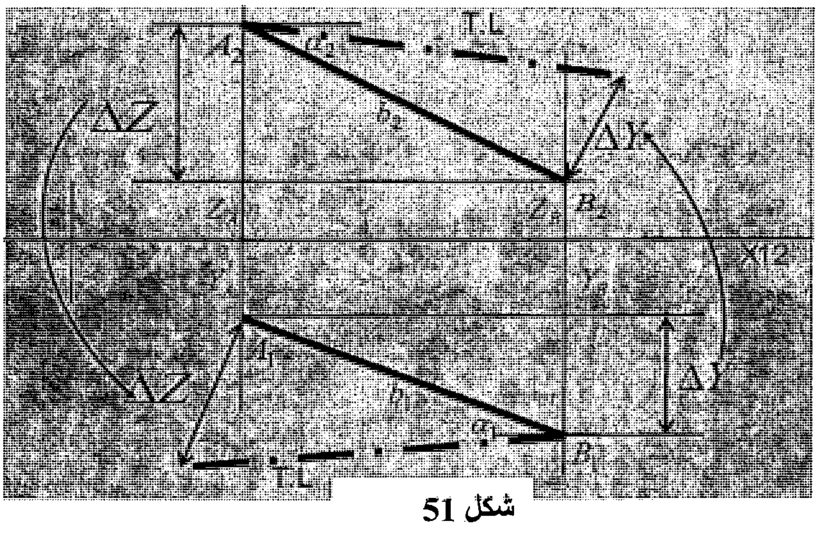
طريقه الإنطباق



شكل 50

طريقه فرق البعد

وفى هذه الطريقه نعتمد على المساقط الوجوده ونأتى بالطول الحقيقى إما بنقل ΔY من المسقط الأفقى للمستقيم الى العمودى المقام على المسقط الرأسى للمستقيم كما بالشكل **51** ونستنتج الطول الحقيقى وزاويه ميل المستقيم على المستوى الرأسى او بنقل ΔZ من المسقط الرأسى للمستقيم الى العمودى المقام على المسقط الأفقى للمستقيم كما بالشكل الموضح ونستنتج



شكل 51

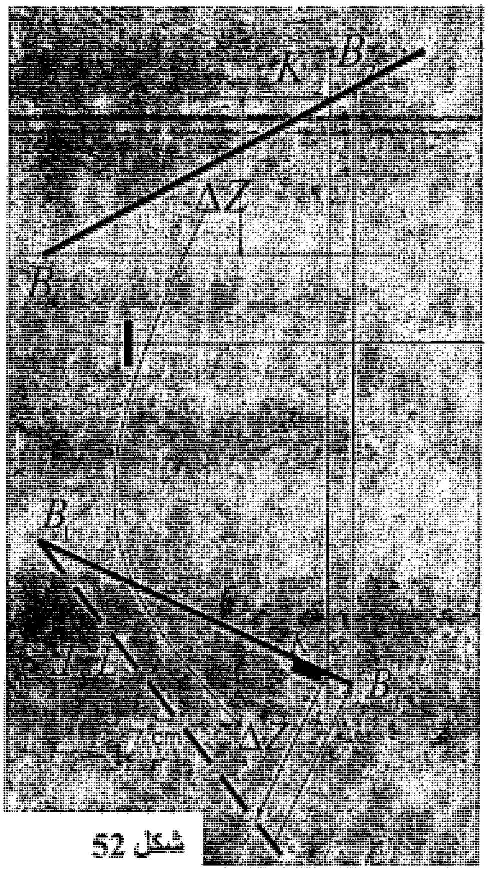
الطول الحقيقى وزاويه ميل المستقيم على المستوى الأفقى. ويمكن المقارنه والتأكد أنه طول واحد.

ويمكن إستخدام هذا الإسلوب فى تحديد بعد أى نقطه عن أى نقطه أخرى على المستقيم وذلك بتحديد قطعه مستقيمه على المستقيم.

مثال:

المثال الموضح يبين كيفية قياس نقطه تبعد عن نقطه **B** مسافه **7 cm** على المستقيم الموضح شكل **52**:

نختار أى نقطه على هذا العمودى مثل نقطة K وبالتالى نوجد الطول الحقيقى للمستقيم BK يكون هذا هو إتجاه الطول الحقيقى للحرف ومن هنا يمكن قياس الإرتفاع المطلوب عليه وليكن **7cm** ونعود به فنحصل على مسقط النقطه B' فى المستوى الأفقى ثم نصعد بها لنأتى بمسقطها الرأسى ، وبذلك أصبح لدينا مكان النقطه فى كل من المستوى الأفقى والرأسى شكل **52** .



شكل 52

طريقه الدوران

هذه الطريقه يتم شرحها فى باب القياس.

فوائد إيجاد الطول الحقيقى:

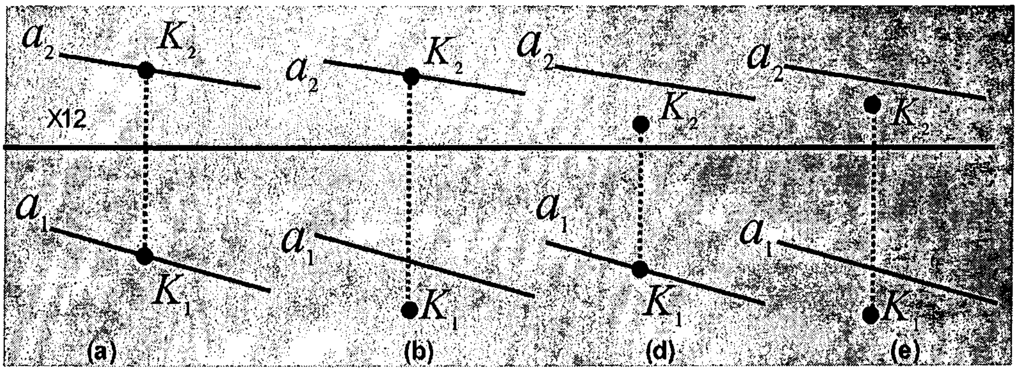
نتيجة: الزاوية القائمة تسقط قائمة طالما كان أحد أضلاعها T.L أى يظهر بطولة الحقيقى (طالما موازى لمستوى المسقط) والعمودى على ال T.L ليس T.L . (مادام الإسقاط ليس لشكل حقيقى (T.S))

لذلك إذا كان الحل فى الهندسة المستوية يستلزم عمل عمود واحد على أحد المستقيمات او إسقاط عمود من نقطة على مستقيم فإن هذا يقودنا إلى أن هذا المستقيم لابد أن يكون **T.L** حتى يتم إقامة العمود علية. ويجب أن لاننسى أن طول العمود الذى يتم عملة على **T.L** ليس **T.L** . ويجب أن نلاحظ أنه يمكن أن يكون العمودى هو الطول الحقيقى والمستقيم الساقط عليه العمودى ليس طول حقيقى.

وبالتالى القاعده العامه ان الزاويه *الزاوية القائمة تُسقط قائمة طالما كان أحد أضلاعها T.L يظهر بطولة الحقيقى يـتم تطبيقها* سواء كان أحد الاضلاع هو العمودى الذى سيتم إسقاطه على المستقيم أو المستقيم الـذى سـيتم إسـقاط العمودى عليه.

علاقة النقطة بالمستقيم الواقعة عليه (شرط وقوع نقطة على مستقيم)

الشرط الرئيسى لوقوع نقطة على مستقيم شكل 53- a هى أن يكون المسقط الأفقى للنقطة يقع علـى المسـقط الأفقى للمستقيم والمسقط الرأسى للنقطة يقع على المسقط الرأسى للمستقيم، أى أن K_1 يقع على a_1 وكذلك K_2 يقع على a_2 شكل 53- a. أما شكل 53-b لايتحقق الشرط فى المسقط الأفقى وإن تحقق نصفه وكذلك شـكل 53-b ، أما شكل 53- e فلم يتحقق منه أى شيء.

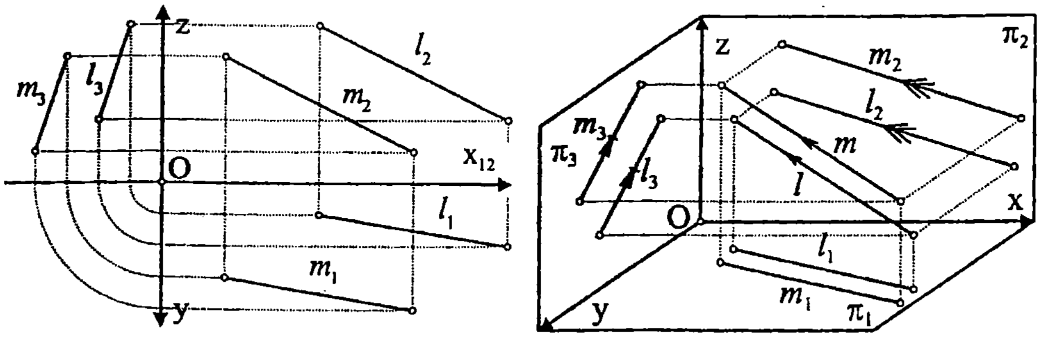


شكل 53

العلاقة بين أى مستقيمين فى الفراغ

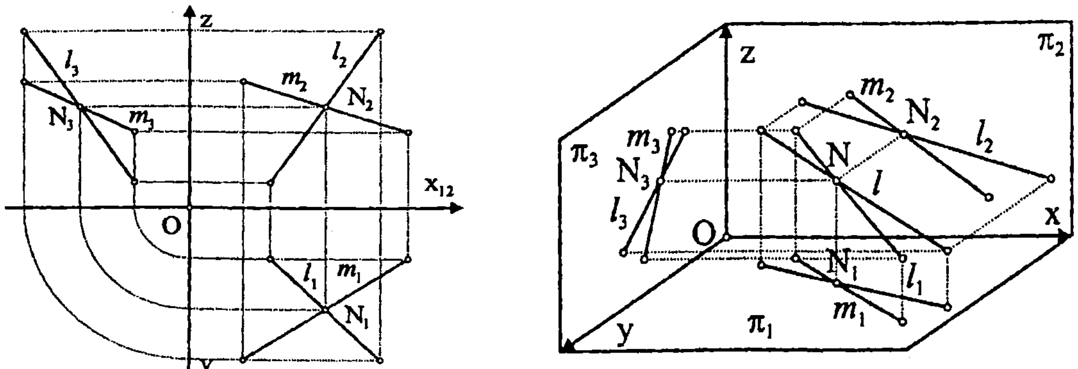
1- مستقيمين متوازيين:

أى مستقيمين فى الفراغ يكون المساقط الأفقية للمستقيمين متوازيين وكذلك فى المسقط الرأسى المسقطين للمستقيمين متوازيين، وكذلك أيضا فى المسقط الجانبى، $l_1//m_1, l_2//m_2, l_3//m_3$. شكل 54.



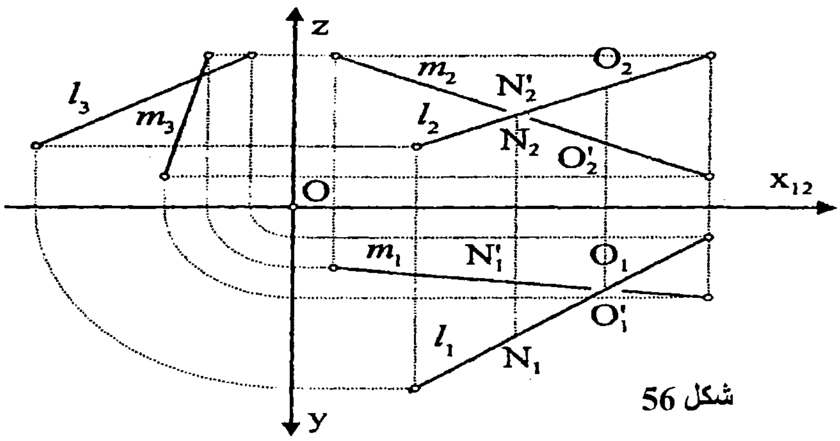
شكل 54

2- مستقيمين متقاطعين:



شكل 55

3- مستقيمين شماليين:

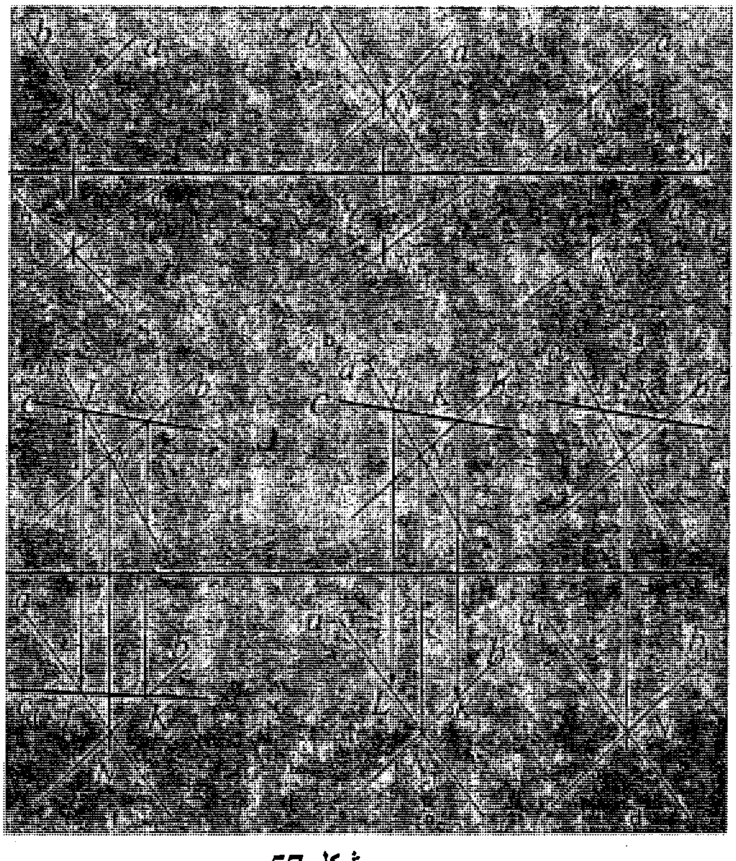


شكل 56

هذه المستقيمات فى شـــكل 56 لايمكن أن يحتويها مستوى واحد فى الفراغ ولايمكن أن يتقاطعا فى أى وضع. ويلاحظ عند تمثيل المستقيمات الشماليه أن المستقيم الواصل بين مسقطى نقطتى التقـــاطع فى المسقط الرأسى والأفقى لايكون عمودى على خط الأرض كما بالشكل الموضح. وايضا عنـــد إســـتخدام الإســـقاط العمودى نجد أن مسقط نقطة التقاطع الظاهره فى المسقط الأفقى تقع على المسقطين الأفقيين للمستقيمين والواضـــحه

شكلا وليست حقيقيه تولد مسقطين رأسيين لنفس النقطه **ولا تحقق شرط وقوع نقطة على مستقيم** لكلا المستقيمين وهذا مستحيل لأن كل نقطه لها مسقط رأسى واحد ومسقط أفقى واحد. وهذا يتضح من المسقط الأفقى O_1 والذى ينتج منه رأسيا بالتناظر فى المسقط الرأسى O_2' , O_2 وكذلك النقطه N_2 ينتج لها رأسيا بالتناظر فى المسقط الأفقى N_1, N_1' وهذا أيضا غير ممكن.

طبيعه نقطة تقاطع مستقيمين: لو أن هناك مستقيم a علية نقطة N (شكل 57 -a) فإن المسقط الأفقى لنقطة N_1 يكون متواجد على المسقط الأفقي للمستقيم a_1 والمسقط الرأسى لنقطة N_2 يكون متواجد على المسقط الرأسى للمستقيم a_2، فاذا قطع مسقط رأسى لمستقيم b_2 المسقط الرأسى a_2 فى N_2 فإن b_1 لابد أن يقطع a_1 فى المسقط الأفقى لنقطة التقاطع N_1 ليتحقق شرط وقوع نقطة N على كلا المستقيمين(شكل C–57)، وبالتالى المستقيمين الواقعين فى نفس المستوى يتقاطعوا فى نقطه واحده . *وبالتالى عكس هذه العلاقة صحيح كما سنرى فى النظرية القادمة*



شكل 57

نظرية توليد المستقيمات

إعتماد على علاقة النقطة بالمستقيم وخاصة علاقه نقطة تقاطع مستقيمين فإنه يمكن إستنتاج المسقط الناقص لاى مستقيم يقع فى مستوى مكون من مستقيمين متقاطعين فى نقطه" وذلك بإسقاط نقاط التقاطع. من شكل d–57 يوضح المستقيمين المتقاطعين a,b فى نقطة N " وهو شرط أساسى ليكون المستقيمان مستوى " وقد تم

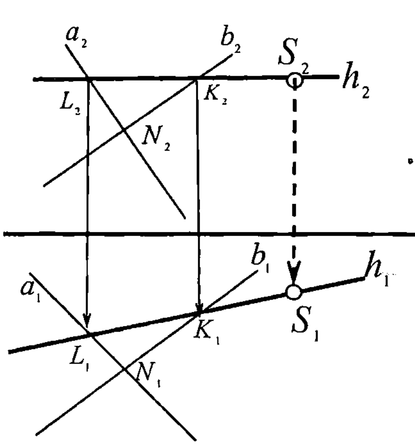
تمرير فى أى مكان المسقط الرأسى للمستقيم C_2 والمطلوب إستنتاج المسقط الأفقى C_1. هذه هـى نظريـة توليـد المستقيمات، أن تمرر مسقط وتستنتج الأخر بناء على نقاط التقاطع. نلاحظ أن C_2 قطع a_2 فى نقطة k_2 وقطع b_2 فى نقطة L_2 ، وعليه فإن كل من النقطتين **K,L** لابد أن يحققا شرط وقوع نقطة على مستقيم بالنسبة للمستقيمن **a,b** ، ولذلك يتم إسقاط نقاط التقاطع k_2 و L_2 لإستنتاج K_1 على b_1 وإستنتاج L_1 على a_1 شكل **e–57**. وشكل **f-57** يوضح أن C_1 سيكون هو K_1 L_1 لذلك يتم توصيلهما فيكون المسقط الأفقى للمستقيم.

بذلك نكون قد أوضحنا كيف يتم إستنتاج مسقط ناقص لمستقيم وعلية يمكنك عزيزى الطالب أن تكرر التجربة وتمرر مسقطا رأسيا مثل C_2 وتولد وتستنتجج C_1. ويمكن أن يكون العكس بتمرير C_1 وإسقاط نقاط التقاطع على المسقط الرأسى بالتناظر وإيجاد مساقطهم وإستنتاج C_2 وكذلك يمكن أن يكون المسقط الذى تمررة مسقط لمستقيم أفقـى او وجهى ونستنتج المسقط الناقص. وبالتالى تستخدم نظرية التوليد فى توقيع مسقط ثم إستنتاج المناظر لة. لـذلك هـذة القاعدة مهمة جدا لإستخدامها فى تطبيقات قادمه خاصة فى إيجاد الأثار الناقصة للمستويات واتجاهاتها كما سيتم شرحة فى المثال القادم.

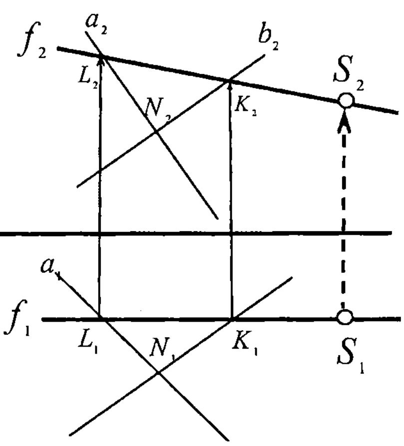
إيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط بإستخدام قاعدة توليد المستقيمات

يتم ذلك بتمرير مسقط رأسى او أفقى لأى مستقيم تبعا للمسقط المعلوم من النقطة.ثم إسـتنتاج المسـقط الأخـر للمستقيم وتوقيع علية المسقط الناقص للنقطة.ومن المثال الأتى لو أن هناك مستوى ممثل بمستقيمين متقاطعين وكان هناك مسقط لنقطه معروف والأخر غير معـروف كالأتى:

مـن شـكل **a–58** معلوم مسـقط أفقـى لنقطـة وهـى S_1 ومطلوب إيجاد مسقطها الرأسى، لذلك يتم تمرير مسقط أفقى لمستقم وجهى f_1 حيث أنه يوازى X_{12} وبالتناظر لنقاط تقاطع f_1 مع a_1, b_1



شكل **b-58**



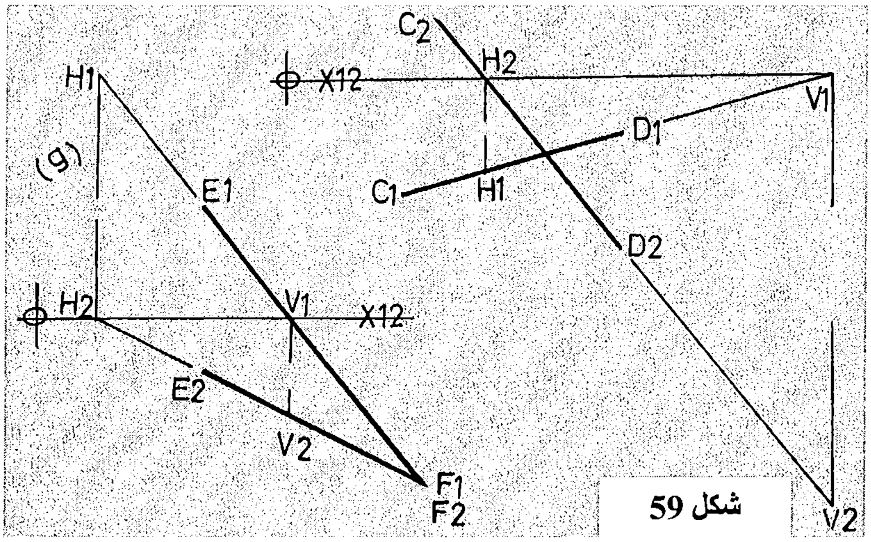
شكل **a-58**

وهى K_1 و L_1 وإيجاد k_2 و L_2 على a_2,b_2 وهما بالتالى مكونات f_2 الذى يقع علية المسقط الرأسى للنقطة S_2 وبالتالى يتم تصعيدها علي المسقط الرأسى f_2 . بنفس هذة القاعدة فى شكل b−58 يتم إستنتاج المسقط الأفقى S_1 على h_1 وذلك بتمرير مسقط رأسى لمستقيم أفقى h_2 بالمسقط الرأسى للنقطة S_2 ثم إستنتاج h_1 من خلال إسقاط نقاط التقاطع ونوقع علية S_1 بالتناظر .

<u>وملخص إيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط -- يتم بتمرير مسقط رأسى او أفقى تبعا للمسقط المعلوم من النقطة لأى مستقيم فى وضع عام أو خاص ثم إستنتاج المسقط الأخر للمستقيم وتوقيع علية المسقط الناقص للنقطة.</u>

مثل المستقيمات الأتية وعين لكل منهما الأثر الأفقى والرأسى: g [E(3,-2,-1), F(7,3,-3)],
d [C(2,2,2),D(6,1,-3)]

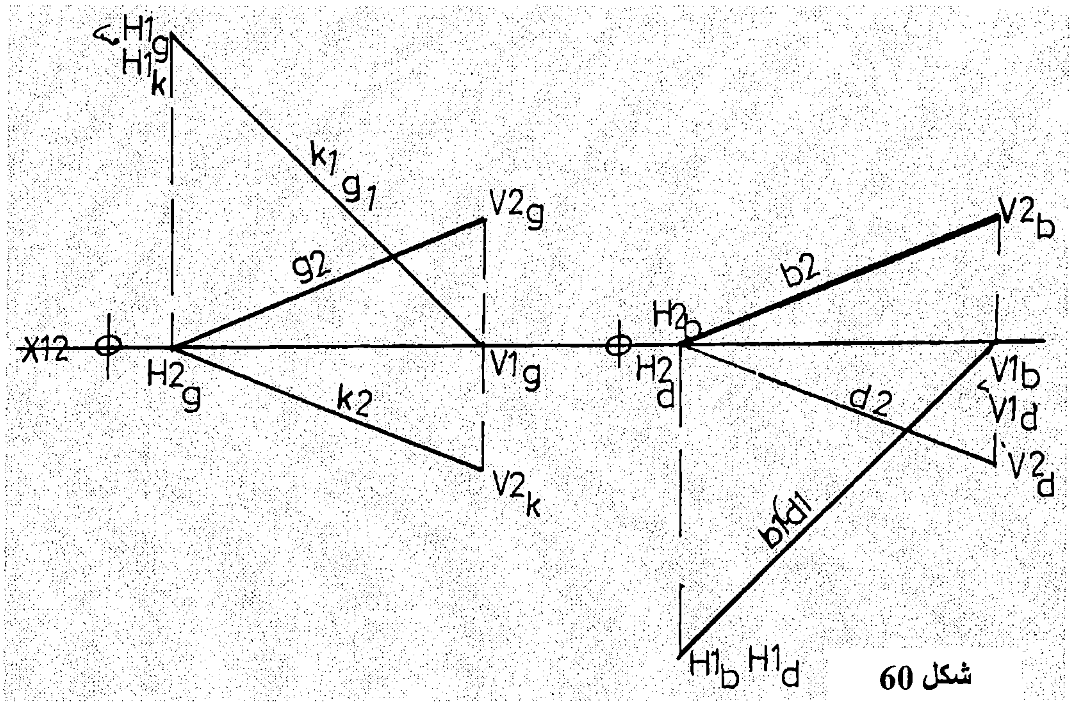
الحل:بإستخدام قاعدة "وصل وقيم عمود" يتم إستخدامها على كل من المسقط الرأسى والأفقى فيتم إستنتاج الأثار الأفقية والرأسية ، شكل **59**.



شكل 59

المعلوم الأثران الأفقى والرأسى H,V لكل من المستقيمات الأتية:
b[H(1,5), V(6,2)], g [H(1,-5), V(6,2)], d [H(1,5), V(6,-2)], k [H(1,-5),V(6,-2)]

الحل : بإستخدام قاعدة أسقط عمود ووصل يتم ذلك من الأثر الأفقى إلى الأثر الرأسى ومن الأثر الرأسى إلى الأثر الأفقى أيضا يتم إستنتاج مساقط المستقيمات ، شكل **60**.

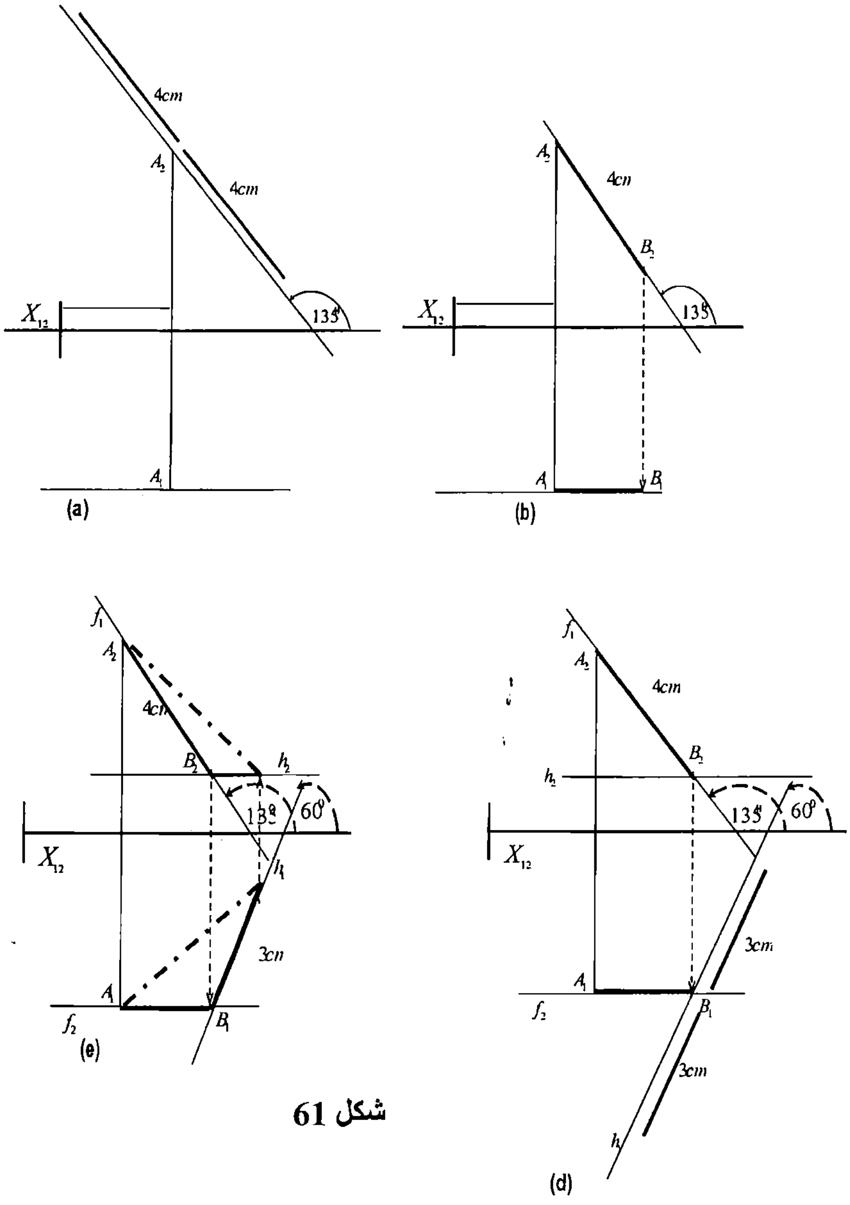


شكل 60

مثل المثلث ABC الذى فيه: A(3,3.5,4) و AB وجهى ويميل 135^0 على المستوى الأفقى وطوله 4cm ، BC أفقى ويميل 60^0 على المستوى الرأسى وطوله 3cm .

الحل:

من الشكل الموضح نجد أن الشكل **a-61** نرسم من نقطة **A** محل هندسى لمستقيم وجهى **f** هــذا هــو المحــل الهندســى للمستقيم **AB** ولكــن طوله **4cm** وهذا الطول لايمكن قياسه إلا علــى مستقيم له طول حقيقى ويقاس فى إتجاه الطــول الحقيقــى أى علــى f_2 ولكن السؤال هل القياس من نقطة **A** لأعلــى أم لأســـفل ، الحـــلان صحيحان والفرق بينهما



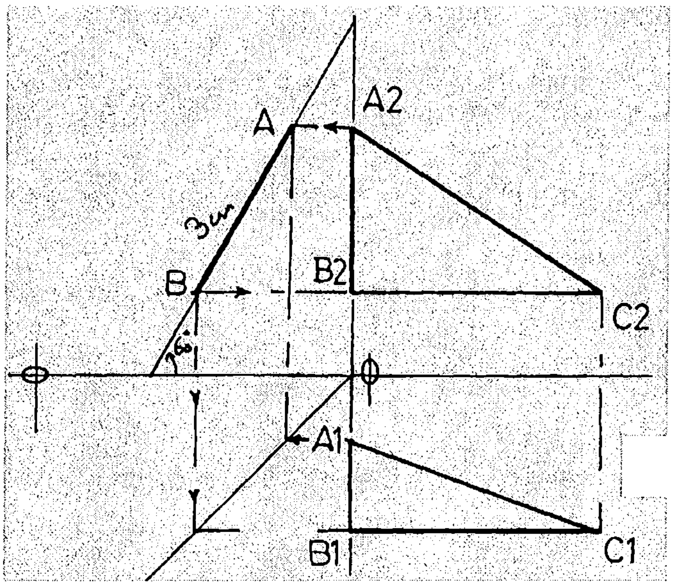
شكل 61

أن القياس إن كان لأعلى فهذا يعنى أن $Z_A<Z_B$ ، وإن كان القياس لأسفل فإن وضع نقطة B_2 سيكون فى الوضــع الذى فيه $Z_A > Z_B$ وبذلك يتوفر مبدئيا حلان ونحن سنأخذ الحل الذى فيه $Z_A > Z_B$ كأحد الحلــول. وهــذا مايتوفر فى الشكل **(b-61)** حيث نحدد مكان B_2 على f_2 ومن ثم بالإسقاط المباشر على f_1 نوجد B_1 . بعد تحديد نقطة **B** يمكن الأن رسم المحل الهندسى للمستقيم **BC** وهومستقيم أفقى حيث نرسم من B_2 موازى لخط الأرض وهو h_2 ومن B_1 المستقيم الذى يميل 60^0 كمحل للطول الحقيقى وهو h_1 كما فى الشكل **(d-61)** ، حيث يتــوفر h_1

كمكان لقياس الطول الحقيقى ويمكن القياس أيضا عليه لأعلى أو لأسفل. ولكن لو تم قيـــاس طـــول **BC=3cm** لتحديد نقطة **C** لأعلى فهذا يعنى أن $Y_B > Y_C$,وإذا تم القياس لأسفل فهذا يعنى أن $Y_B < Y_C$ لذا هناك حلان أخرين وإذا لم يتم التحديد نختار أيهم. لذا فقد تم الأختيار فى الشكل **(e-61)** لتكون **C** لأعلى وتم أكتمال المثلث.

مثـال: مثـل المثلـث ABC حيـث A(0,1,4)، AB مسـتقيم جـانبى ويميـل 60^0 علـى المسـتوى الأفقـى وطولـه 3 cm والمستقيم BC يوازى خط الأرض وطولـه 4cm

الحل: فى شكل 62 ومن نقطة **A** ونتيجة لأن **AB** مستقيم جانبى لذا فإنه لايظهر طوله وكذلك لاتظهر زاوية ميله إلا فى المستوى الجانبى ولكى يتم رسمه نتجه للمسقط الجانبى لنقطة **A** ونرسم المحل الهندس للمستقيم **ab** يميل على خـــط الأرض 60^0 أما مساقطه الأفقية والرأسية تكون عمودية على خط الأرض من كل من A_1و A_2 . من نقطة A_3 يتم توقيع الطول الحقيقى فى المستوى الجانبى وكما ذكرنا يمكن لأعلى ولأسفل أى هناك حلان أحدهما لأعلى ويكون فيـــه $Z_B > Z_A$ والأخر لأسفل ويكون فيه $Z_B<Z_A$ وفى هذا الحل أخترناها لأسفل فتم تحديد مكان B_3 عن A_3 بمسافة **3cm** ومن ثم نوجد بالأسقاط كل من B_1و B_2 . من كل من B_1و B_2 يتم رسم المحل الهندسى للمستقيم **BC** حيث أنه يوازى خط الأرض فى كل من المسقطين وطول حقيقى فى المسقطين فنوقع عليه طول **BC=4cm** فنحـــدد بعـــد **C** . وكذلك كان يمكن قياس بعد **C** يمن وشمال وفى هذه الحاله سيكون الأختلاف فى مكان **C** للبعد **X** . لأنه لو تم القياس شمال نقطة **B** ستكون $X_B > X_C$ أما لو تم القياس يمين نقطـــة **B** ســـتكون $X_B < X_C$.



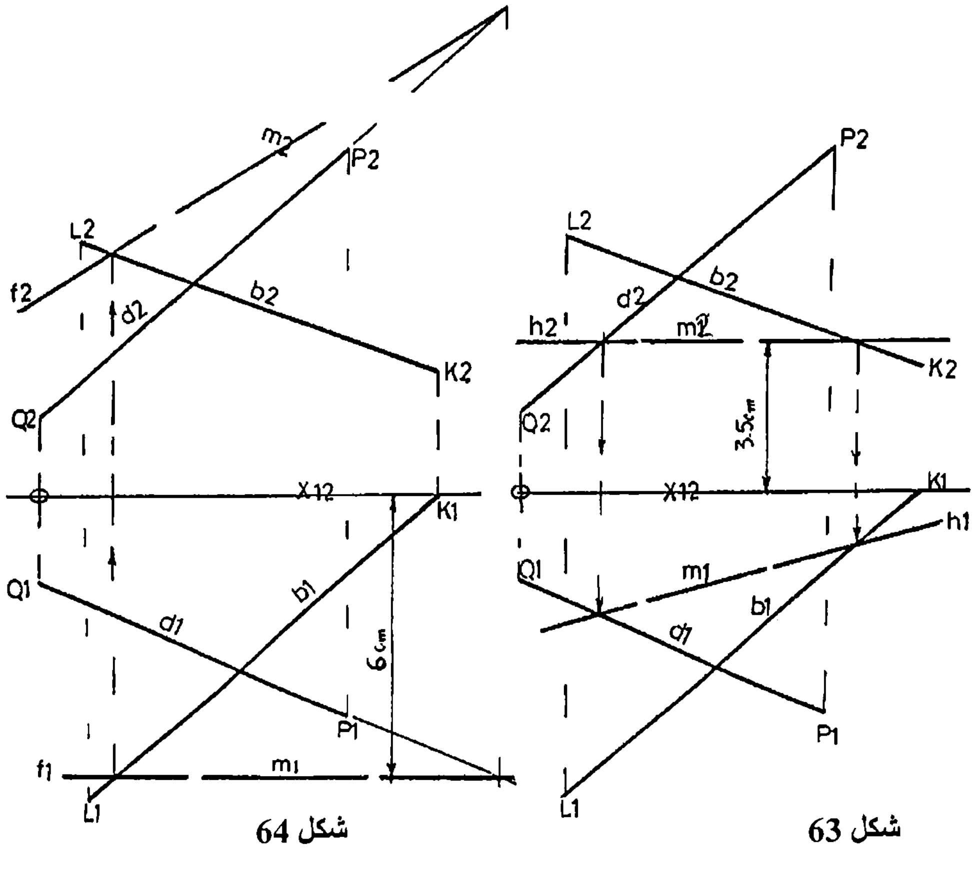
شكل 62

المعلوم المستقيمان الشماليين [$d[P(7,5,8), Q(0,2,2)]$, $b[K(9,0,3), L(1,7,6)]$ المطلوب تحديد مستقيم m يقطعهما بحيث: 1- أفقى يرتفع 3.5 cm ، 2- وجهى يبعد 6cm ، 3- يوازى خط الأرض ،4- رأسى ، 5- عمودى على المستوى الرأسى، 6- واقع فى المستوى الأفقى

الحل:

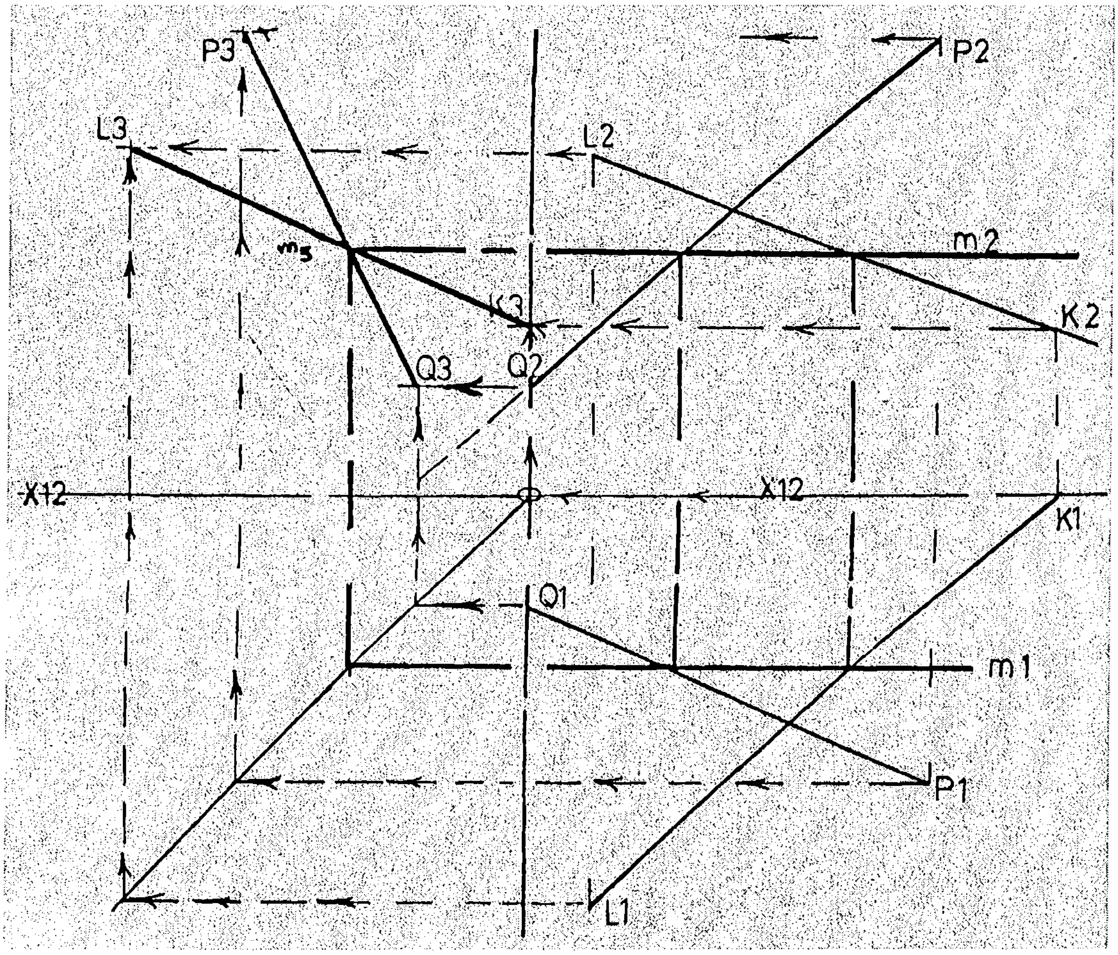
أولا- القاطع أفقي يرتفع **3.5 cm**: القاطع الأفقى (أى مستقيم أفقى) من مواصفاته أن مسقطه الرأسى $m_2=h_2$ موازى لخط الأرض أما مسقطه الأفقى غير معلوم ، وبناء على ذلك من نظرية توليد المستقيمات يمكن تمرير المسقط الرأسى للمستقيم الأفقى m_2 على إرتفاع **3.5cm** فيقطع المساقط الرأسية للمستقيمين الشماليين فى نقطتين ، نوجد مساقط نقاط التقاطع الأفقيه على للمستقيمن الشمالين ونصلها ببعض فيكون هذا هو m_1 شكل **63**.

ثانيا- القاطع وجهى يبعد **6cm** : بنفس الإسلوب السابق يتم التطبيق ولكن إعتماد على خاصية المستقيم الوجهى و نظرية توليد المستقيمات، حيث نمرر المسقط الأفقى للمستقيم الوجهى $f_1=m_1$ فنستنتج المسقط الرأسى للقاطع m_2 شكل **64**.



شكل 64 **شكل 63**

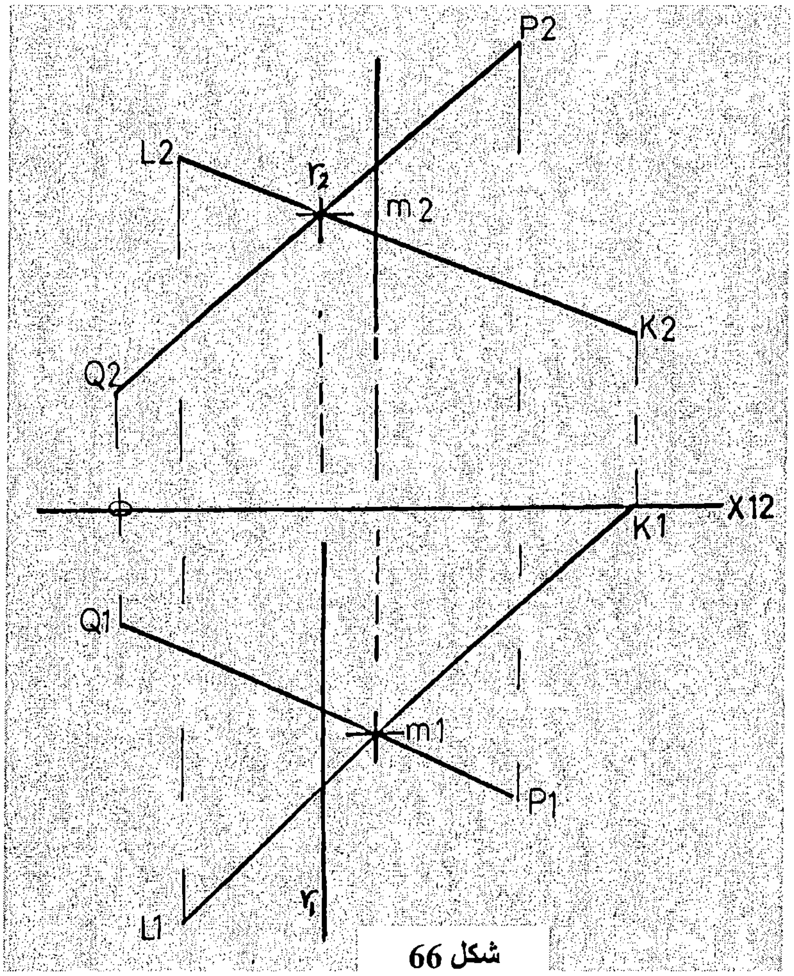
ثالثا– القاطع يوازى خط الأرض : لكى يقطع مستقيم عمودى [أحد مساقطه نقطة] أى مستقيمين شمــالين لابــد أن نبحث فى نفس المسقط الذى يظهر فية المستقيم نقطة عن النقطة المشتركة بين مسقطى المستقيمين الشماليين. والقــاطع الذى يوازى خط الأرض يظهر نقطة فى المستوى الجانبى لأنه عمودى عليه شكل **65**، وبالتالى نذهب للمستوى الجانبى لنوجد المسقط الجانبى للمستقيمن الشماليين فنجدهم مشتركين فى نقطة ، تكون هذه هى m_3 للخــط القــاطع [أى المسقط الجانبى للقاطع الذى يوازى خط الأرض] فنوجد مساقطه الأفقية والرأسية m_1,m_2 بالإسقاط المباشر شــكل **65**.



شكل 65

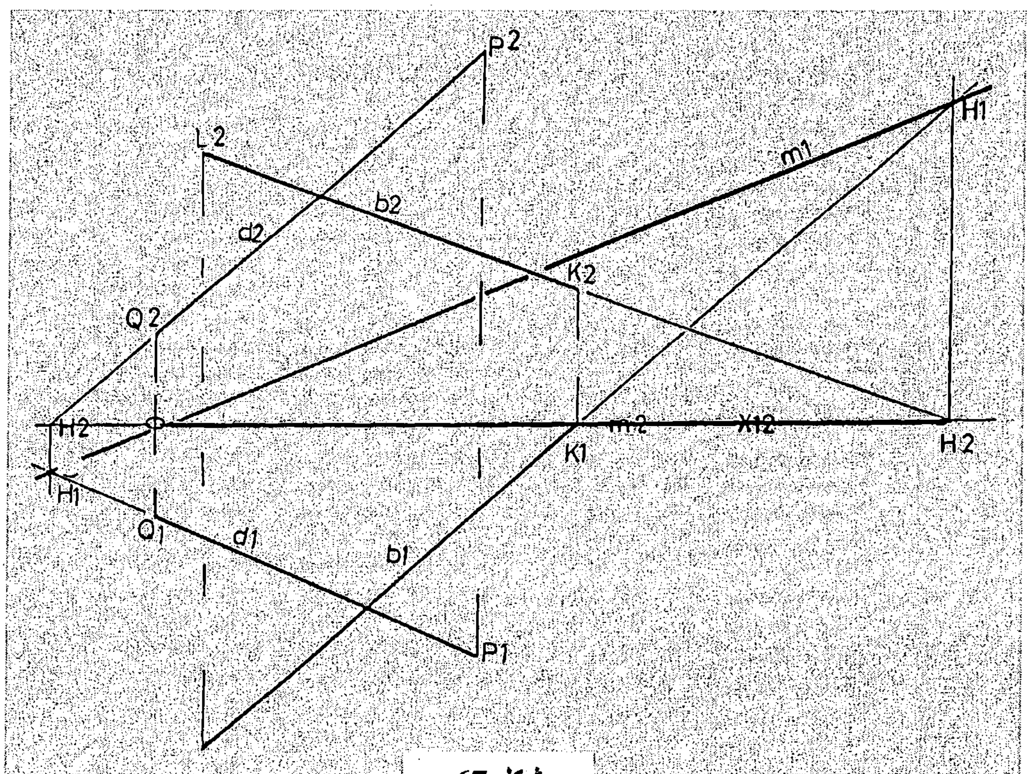
رابعا– القاطع رأسي: بنفس الإسلوب للقاطع العمودى على الجانبى ولكن نبحث على النقطة المشتركة للمستقيمين الشماليين الوجودة فى المستوى الأفقى لأن القاطع مسقطه فى الأفقى نقطة وهو m_1 ونوجد مسقط القاطع الرأسى وهو خط رأسى m_2 شكل 66.

خامسا– القاطع عمودى على المستوى الرأسى: بنفس الإسلوب للقاطع العمودى على الأفقى ولكن نبحث على النقطة المشتركة للمستقيمين الشماليين الوجودة فى المستوى الرأسى r_2 ونوجد مسقط القاطع الأفقى وهو خط رأسى r_1 شكل 66.



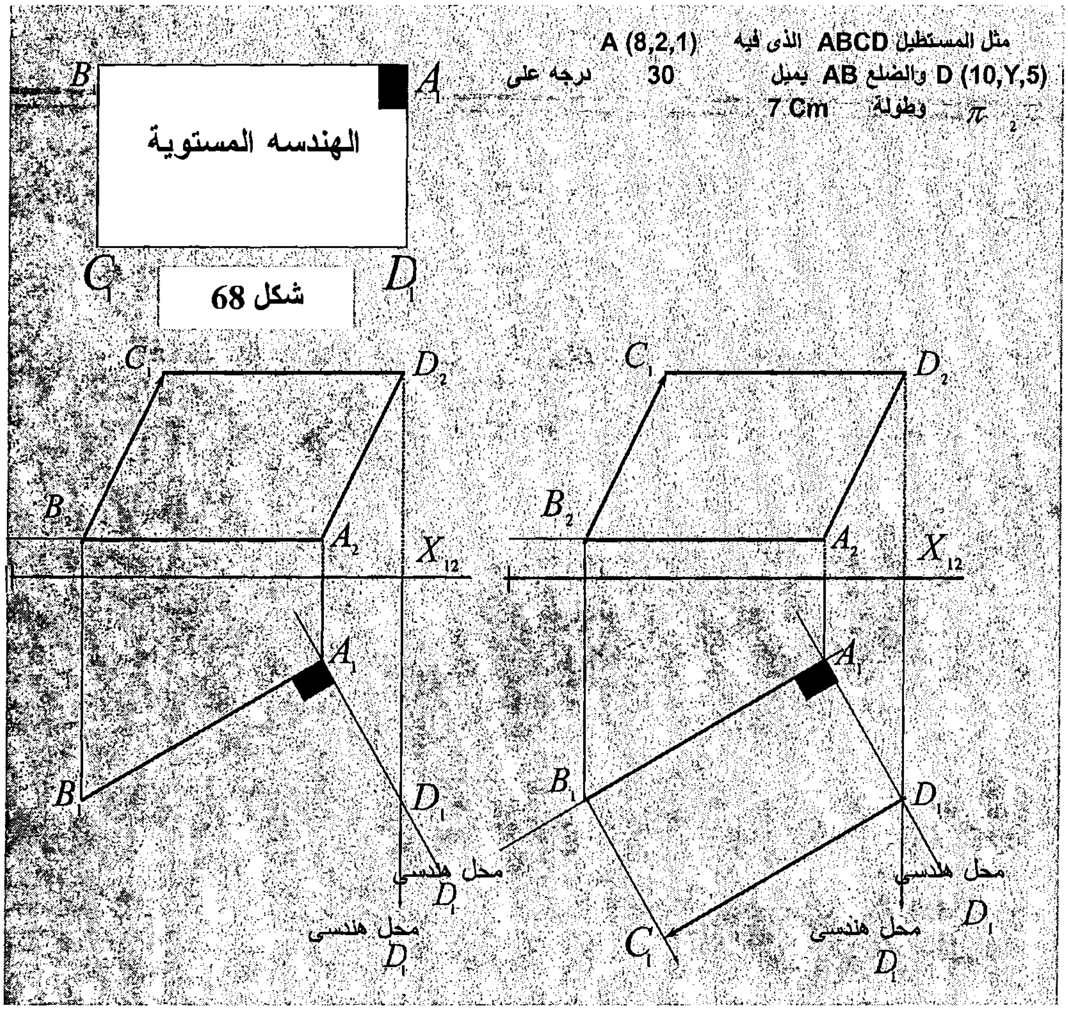
شكل 66

سادسا- القاطع واقع فى المستوى الأفقى: لكى يقطع مستقيم مستقيمين ويكون هذا المستقيم واقع فى الأفقى ، لابد أن هذا القاطع يقطع المستقيمين فى نقطتين واقعتين فى المستوى الأفقى. إذا لابد أن نبحث على المستقيمين الشماليين عن النقطة التى تقع على كل منهما وتقع فى المستوى الأفقى حتى يمر بهما المسقط الأفقى للقاطع. ومن مميزات المستقيم أن النقطة الوحيدة التى تقع عليه وتقع فى الأفقى هى الأثر الأفقى للمستقيم شكل 67. وبذلك لابد أن نحصل على الأثار الأفقية للمستقيمين الشماليين H_1 للمستقيم b و H_1 للمستقيم d وبذلك يكون الواصل بين H_1 لكلا المستقيمين هو m_1 شكل 67، والواصل بين H_2 لكلا المستقيمين هو m_2 . { لو كان القاطع المطلوب واقع فى المستوى الرأسى، إذا يمر بالأثار الرأسية، ولو كان القاطع المطلوب واقع فى المستوى الجانبى، إذا يمر بالأثار الجانبية}



شكل 67

مثال:



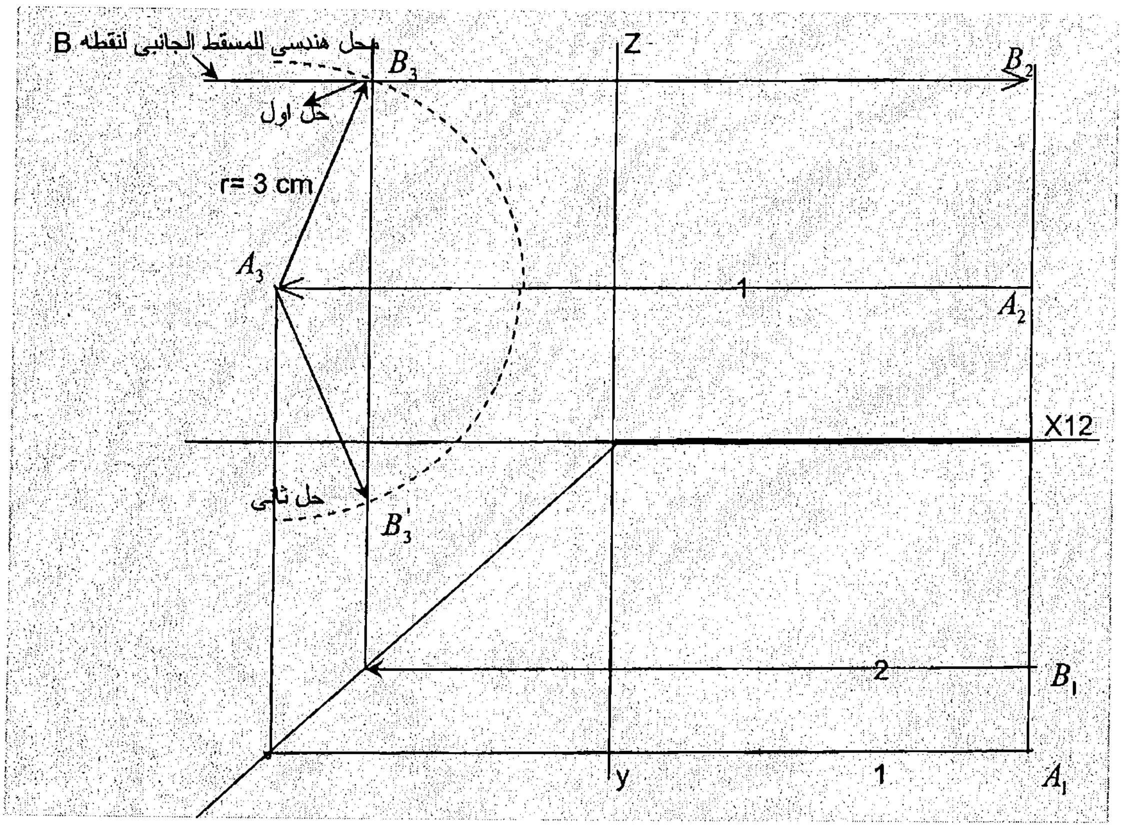
شكل 69 شكل 70

نجد من المعطيات أن المسقط الرأسى مكتمل بالنسبة للمستطيل ولكن المسقط الأفقى ناقص شكل 69، ومن الحل بالهندسه المستويه شكل 68 نجد أن المعطى هو الضلع AB وناقص الإحداثى للنقطة D ومن خصائص المستطيل أن الضلع ABعمودى على AD وهذا يعنى أننا سنقيم عمودى على AB فيكون محل هندسى للضلع AD وهذا متاح فى الهندسة المستوية شكل 68. ولكن لتنفيزة فى الهندسة الوصفية لابد أن يكون الضلع AB فى حالة T.L ومن حسن الحظ أنه T.L فى المسقط الأفقى لأنه مستقيم أفقى شكل 70 وبالتالى يمكن عمل عمودى عليه مباشرة فى المسقط الأفقى فيكون هذا العمودى محل هندسى للنقطة D_1 يتقاطع مع المحل الرأسى فى المسقط الأفقى لنقطة D_1 شكل 70.

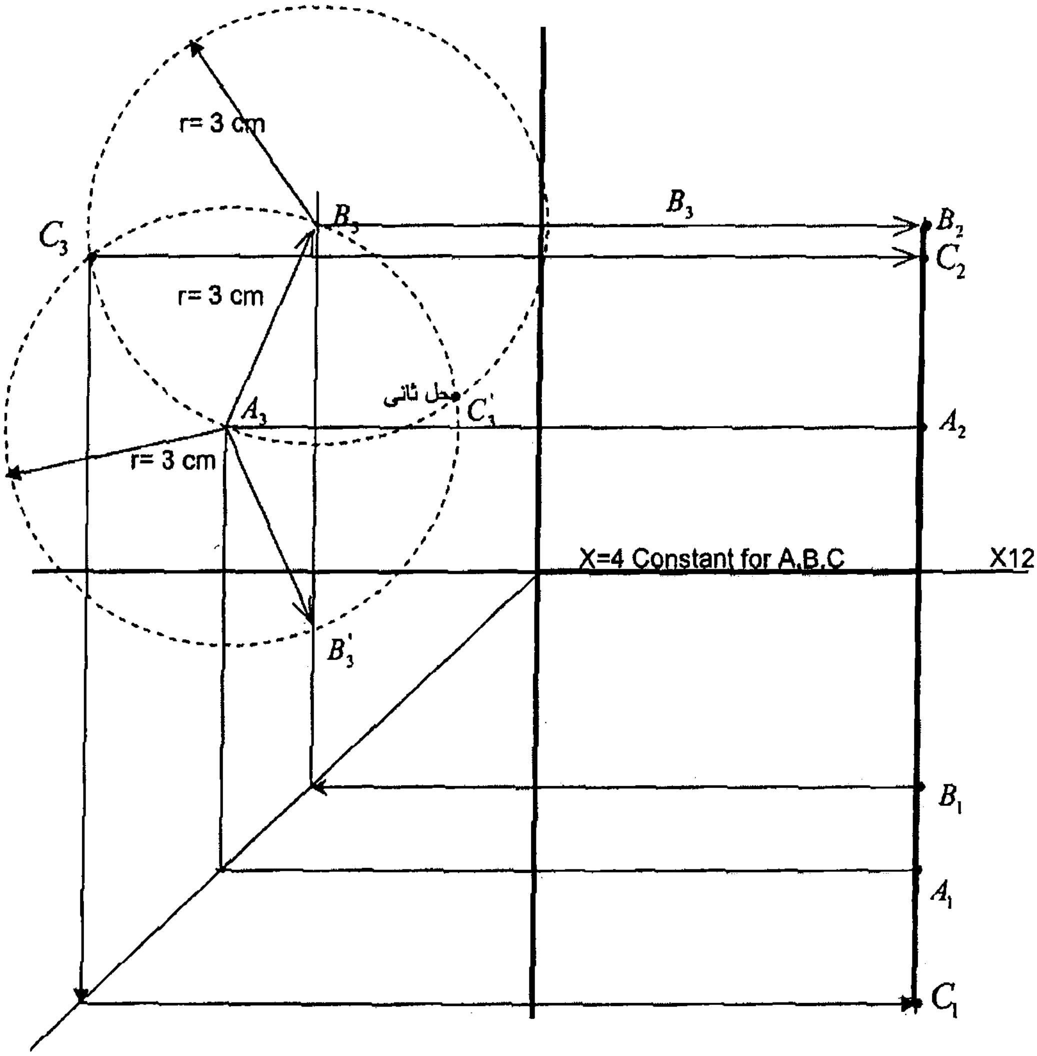
دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

مثل المثلث الجانبى المتساوى الأضلاع = 3 سم والذى فيه نقطه A(5,4,2) ونقطه B(?,3,?)

الحل: من خاصيه أن المثلث جانبى أى أن جميع أضلاعه توازى المستوى الجانبى أى أنها مستقيمات جانبيه أى تظهر بطولها الحقيقى فى الجانبى وبالتالى يتم التعامل معها على أنها فى وضع الهندسه المستويه أى يمكن قياس الأطوال مباشره فى المستوى الجانبى . لذلك يتم إيجاد المسقط الثالث لنقطه **A** بالمسار **1** ثم من الإحداثى B_1 يتم تحويله للمستوى الجانبى كمحل هندسى كما هو موضح فى شكل **71** على المسار **2** فيكون محل هنسى للمسقط الثالث لنقطه **B** . نتيجه لأن طول ضلع المثلث **3** سم فيتم الإرتكاز فى A_3 بنصف قطر **3** سم ونقطع المحل الهندسى ل **B3** فى نقطه "نقطتين" فيكون أحدهما هو المطلوب ويمكن الإعتمادعليه ، لذلك سنأخذ أحدهما وليكن العلوى ما لم يتم تحديد أى وضع داخل السؤال وبعد إستنتاج **B3** يمكن الإرتكاز فى كل من A_3, B_3 بدائره نصف قطرها **3** سم كما بالشكل **72** فيتقاطعا وينتج إحتمالين للنقطه **C** وبهذا يكون لهذا المثال أربعه حلول مالم يتم تحديد أوضاع خاصه للنقاط.



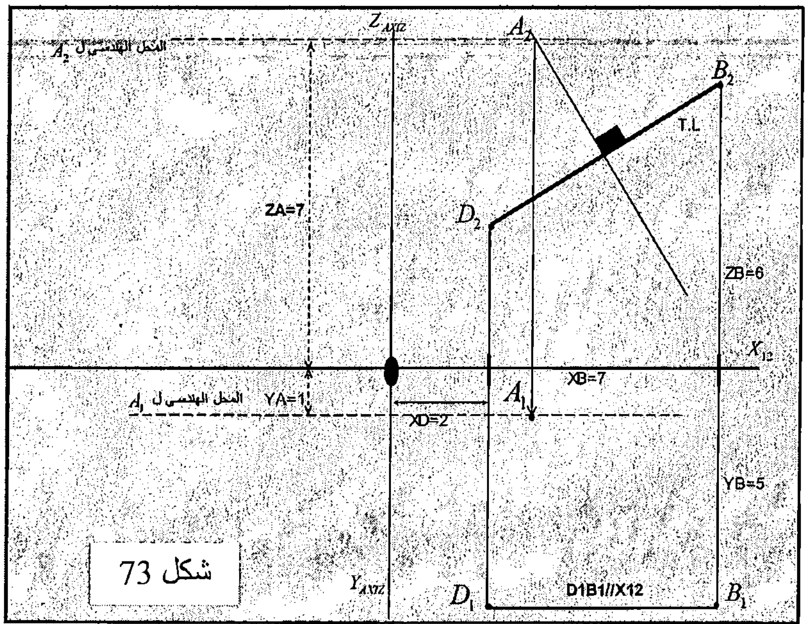
شكل 71



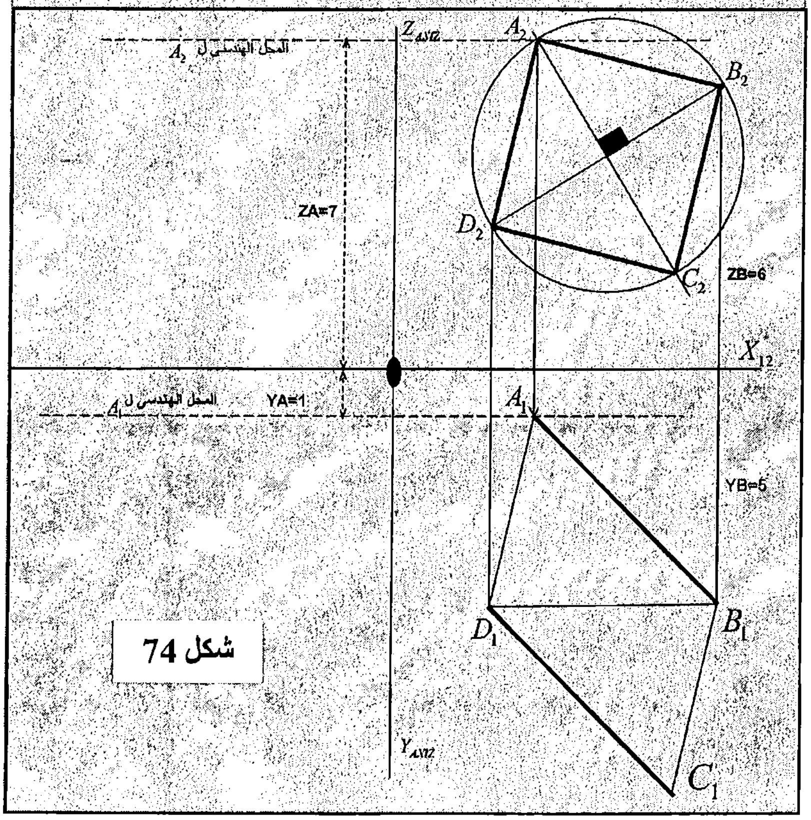
r= 3 cm
B_3
B_3
B_2
C_3
C_2
r= 3 cm
حل ثانى
C_3'
A_3
A_2
r= 3 cm
X=4 Constant for A,B,C
X12
B_3'
B_1
A_1
C_1

شكل 72

عين مساقط المعين ABCD الذي قطره BD حيث D (2,5,3) , B (7 , 5 , 6) ورأسه A (?,1,7)



شكل 73



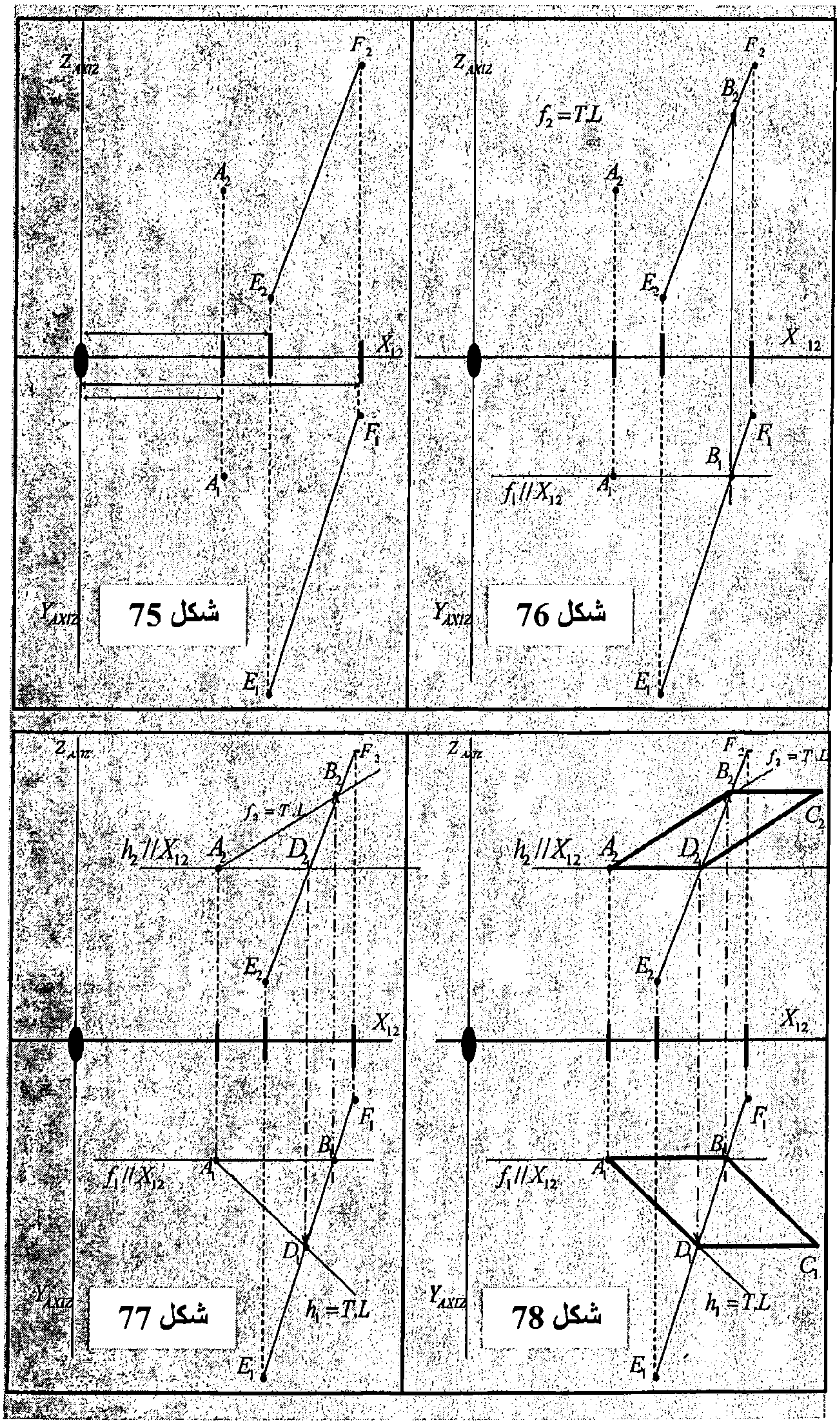
شكل 74

الحل: بعد توقيع المعطيات ومن المواصفات الهندسية للمعين أن القطرين متعامدين ومن إحداثيات النقطتين B,D نجد أن الإحداثى y متساوى أى أن المستقيم BD مستقيم وجهى أى يظهر بطوله الحقيقى فى المستوى الرأسى كل 73 وبالتالى يمكن تطبيق نظريه التعامد مادام أحد أضلاع الزاويه القائمه طول حقيقى . لذلك يمكن إقامة عمودى على المسقط الرأسى للمستقيم الوجهى B_2D_2 من منتصفه يتقاطع مع المحل الهندسى لنقطه A فى المسقط الرأسى وعليه نكون قد حصلنا على المسقط الرأسى A_2 شكل 73 ثم بالإسقاط المباشر على المحل الهندسى للمسقط A_1 نحصل عليها ويصبح لدينا ثلاث نقاط من الشكل الرباعى (المعين) فنكمله بالتوازى شكل 74.

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

معطى نقطة A (3,2,3) والمستقيم FE حيث E (4,6,1) , F = (6,1,5) والمطلوب تمثيل متوازي الاضلاع ABCD الذى قطره BD يقع على المستقيم FE ، وضلعه AB وجهي و ضلعه AD أفقي

الحل:

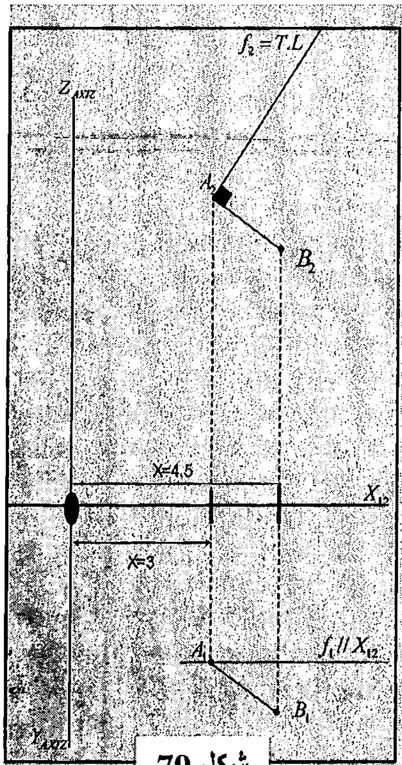


من المعطيات العامه فى شكل 75 و من خاصيه أن **AB** مستقيم وجهى لذا يتم إستغلال خواصــه فى أن $f_1 // X_{12}$ ونمرر من A_1 موازى لخط الأرض يقطع F_1 E_1 فى B_1 ومنه نصعد على F_2 E_2 لنأتى بمكان B_2 شــكل 76. وكذلك من خاصيه أن المستقيم **AD** مستقيم أفقى لذا فى شكل 77 نمررمن A_2 مستقيم $h_2 // X_{12}$ يقطع F_2 E_2 فى المسقط D_2 نذهب للأسفل لإستنتاج D_1 وبالتالى يصبح لدينا فى شكل 77 ثــلاث نقــاط فى كــل مســقط وبإستخدام التوازى فى شكل 78 يتم إستكمال الشكل المتوازى.

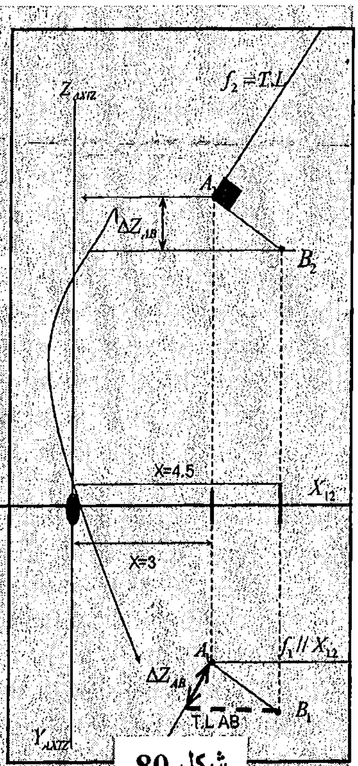
مثال: مثل المربع ABCD حيث , (5, 4, 4.5) B (3,3,6) A والضلع AD مستقيم وجهي .

الحل: بإستخدام النظريه أن الزاويه القائمه تظهر قائمه مادام أحد أضلاعها طول حقيقى ، ونتيجه لأن الضــلع **AD** وجهى فإنه يظهر بطوله الحقيقى فى المستوى π_2 وبالتالى يمكن إستخدام نظريه التعامد فى المستوى الرأسى π_2 والناتج منه يتم إسقاطه مباشره إلى المستوى الأفقى، لذا يتم رسم عمودى على المسقط A_2 B_2 من A_2 فيكون محل هندسى لـA_2 D_2 ومن A_1 موازى لخط الأرض فيكون محل هندسى لـ A_1 D_1 كما بالشكل 79.

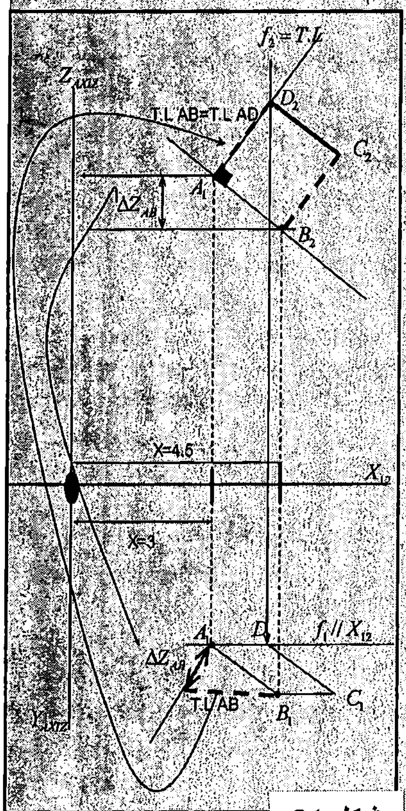
فى شكل 80 يتم إستنتاج الطول الحقيقى لضلع المربع بإستخدام القاعده (المسقط الأفقــى + ΔZ_{AB} = T.L) . فى شكل 81 يتم قياس الطول الحقيقى المستنتج سابقا على إتجاه الطول الحقيقى للمستقيم **AD** وهو فى الإتجــاه الرأســى وبذلك نستنتج D_2 ونستكمل الشكل بالتعامد والتوازى لأن ضلعين من الأضلاع أطوال حقيقيه كما فى شكل 81



شكل 79



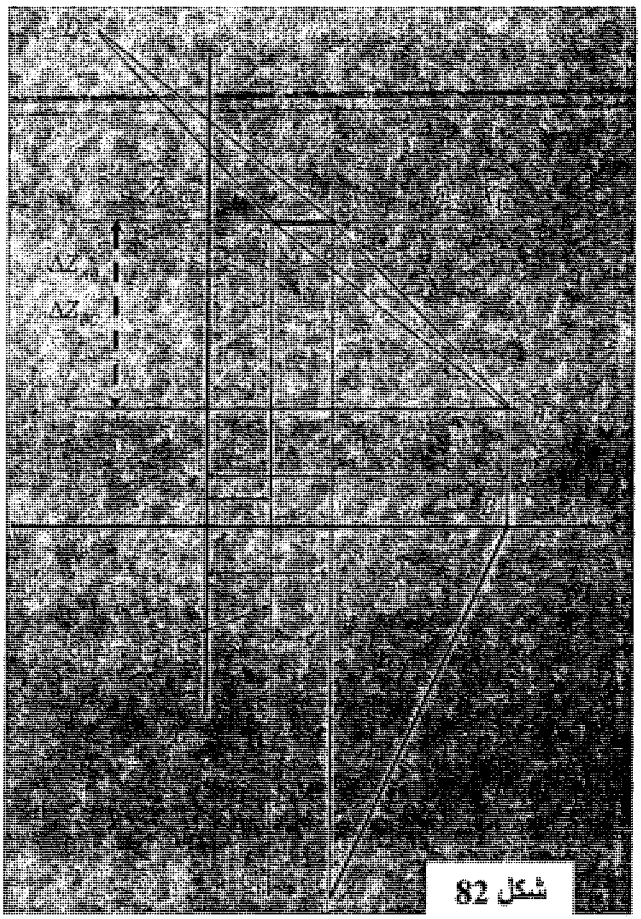
شكل 80



شكل 81

مثل المعين ABCD إذا كان القطر AC مستقيم أفقي حيث (C(1,?,5 و(A (2,6,? و B (5,0,2)

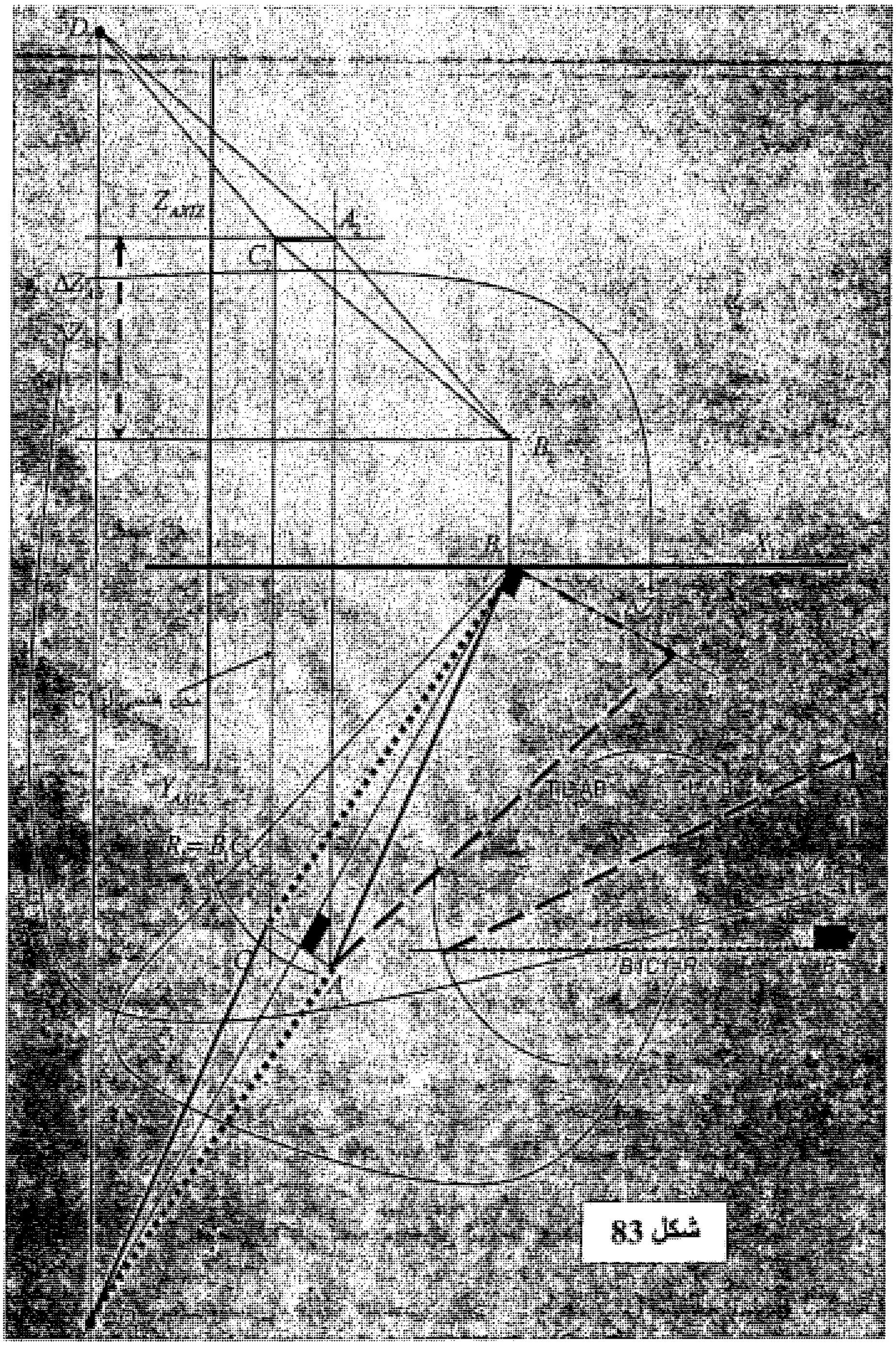
الحل: من مميزات المعين أن كل الأضلاع متساويه والأقطار متعامده ، ومن المعطيات نجد أن الشكل للمعين فى المسقط الرأسى تم تحديده بالكامل وليس به أى مشكله كما بالشكل 82



شكل 82

كيف نفكرفى الحل: تبقى المشكله فى المسقط الأفقى حيث المطلوب تحدبد مكان المسقط الأفقى للنقطه C. وليتم ذلك لابد أن نعرف أننا مباشره نحتاج لقاعده الطول الحقيقى والتى يُذكر به المسقط الأفقى (المسقط الأفقى + ΔZ =T.L) حيث أنه غير معلوم أفقيا غير B_1 ، لذلك يجب أن نطبق المثلث الخاص بالطول الحقيقى بالنسبه للضلع BC (شكل 83) .وكعمليه مساعده نرسم خارج التمرين خط أفقى يكون محل هندسى للمسقط الأفقى BC ثم نرسم عمودى عليه هو ΔZ ومن نهايه ΔZ نركز بالبرجل ونقطع خط عمل المسقط الأفقى بالطول الحقيقى للضلع BC فنستنتج طول المسقط الأفقى أى المسافه C_1 B_1 (شكل 83) ، وبذلك نأخذ هذه المسافه ونتوجه بها إلى المسقط الأفقى ونركز فى B_1 ونقطع المحل الهندسى ل C_1 ونستنتج بذلك المسقط الأفقى للنقطه C ونكمل الشكل الأفقى للمعين (شكل 83) . ومما سبق نجد أننا ليس لدينا الطول الحقيقى للمستقيم BC ولكننا نستعيض عنه بالطول الحقيقى للمستقيم AB لأنه يساويه فى الهندسة المستوية ، ولذلك نأتى بالطول الحقيقى للمستقيم AB بإستخدام نفسى قاعده فرق البعد ونستخدمه بالنسبه للضلع BC. وهذه الخطوات واضحه فى شكل 83 ويجب على الطالب أن يقرأ وهو يقوم بالحل وليست مجرد قراءة للحل. ويمكن الحل إعتماد على المسقط الرأسى ل

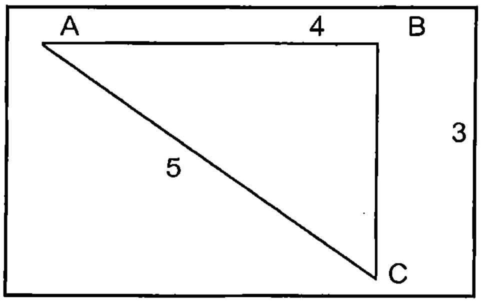
BC ونستنتج بعد إستخدام الـT.L ال ΔY_{BC} وبالتالى نركز فى B_1 ونوقع البعد الذى يبعد به C_1 فى الإتجاه Y ونكمل الشكل.



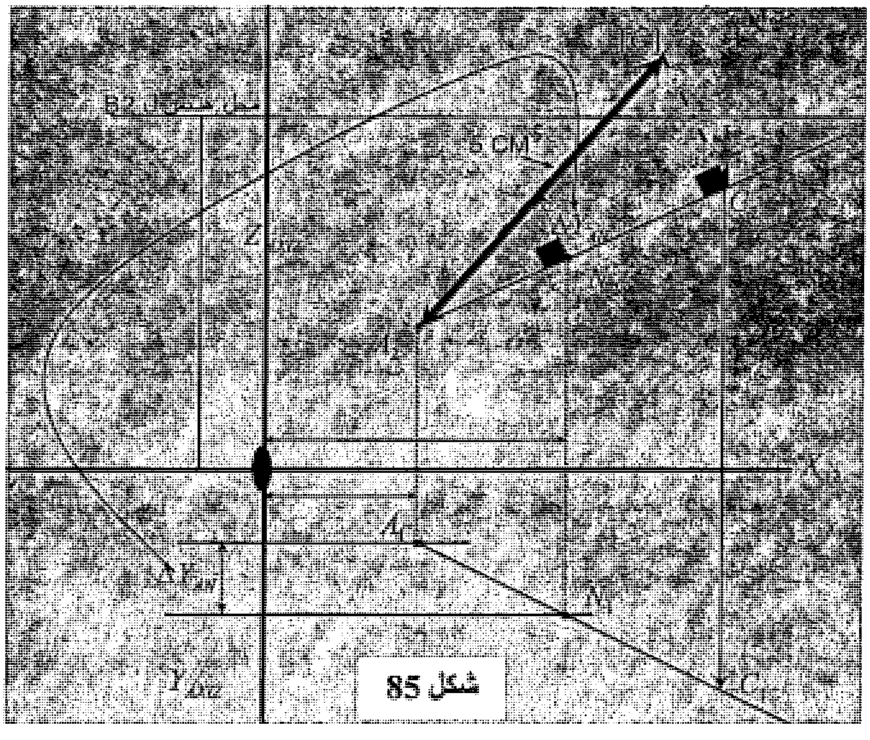
شكل 83

ين مساقط المربع ABCD فيه A(1,4,4) وقطره BD يقع على المستقيم الأفقي E (3,1,6)] F [(0,4,?)

الحل : بعد توقيع المعطيات يمكن قراءه والبدء فى الحل وذلك مع رسم الحل الفراغي . من مميزات الشكل والمعطيات نجد أن القطر BD طول حقيقى وعليه يمكن إسقاط عمود عليه أو إقامة عمود منه وبالتالى لأن القطر BD طول حقيقى فى المسقط الأفقى نقوم من A_1 بإسقاط عمود على المحل الهندسى للقطر B_1D_1 يقطعه فى مركز المربع O_1 ثم نأتى بالطول الحقيقى لنصف القطر OA بفرق البعد ونقوم بقياسه على الطول الحقيقى للقطر BD من نقطه O_1 يمين وشمال فنحصل على نقطتى B وD ونكمل المربع بالتوازى أو بالقياس المتماثل لنقطه A من O فنحصل على C.



23 .عين مساقط المستطيل ABCD اذا كان A (2,1,2) وضلعه AB 4 سم وBC =3 سم ونقطة N (4,2,3) تقع على القطر AC و معلوم الرأس B (?,?,5).

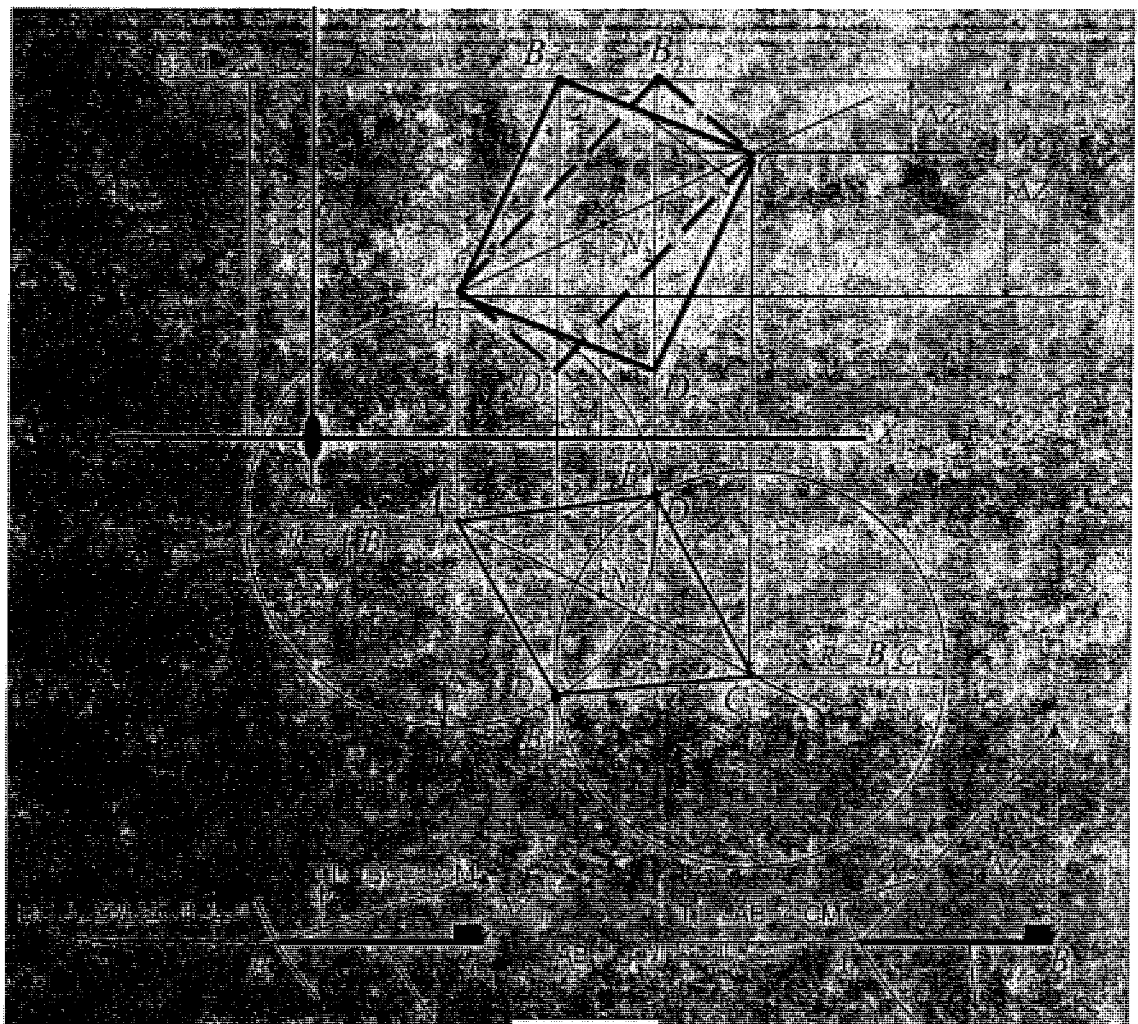


شكل 85

من المميزات الهامه للمستطيل "فيثاغورث" شكل 84 فإن طول القطر للمستطيل يكون 5 سم وبالتالى لو تم تحديد اتجاه الطول الحقيقى للقطر AC ثم قياس عليه 5 سم نكون قد حصلنا على النقطه C شكل 85. من إحداثيات نقطه B المعلومه وهى Z نجد ان ΔZ_{AB} وΔZ_{BC}

أصبحت معلومه ومنهم نفهم اننا سنطبق قاعده فرق البعد لكل من المستقيمين **AB**و **BC** حتى نستطيع إستنتاج

طول المساقط الأفقيه لهم ونأتى بالنقطتين كما فى الاشكال الموضحه شكل **86**.



شكل 86

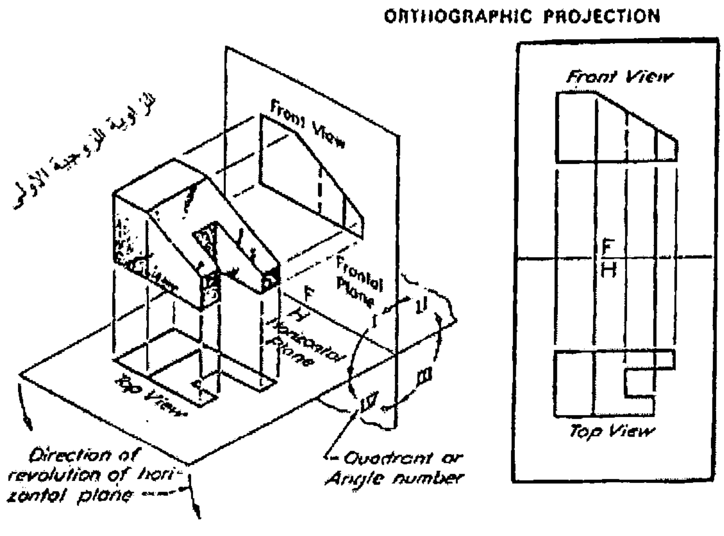
أوضاع المستقيمات فى الفراغ والإسقاط من منظور الرسم الهندسى

كما تم الحدث سابقا فى الفرق فى الإسقاط بين الرسم الهندسى والهندسة الوصفية ، أن الرسم الهندسى

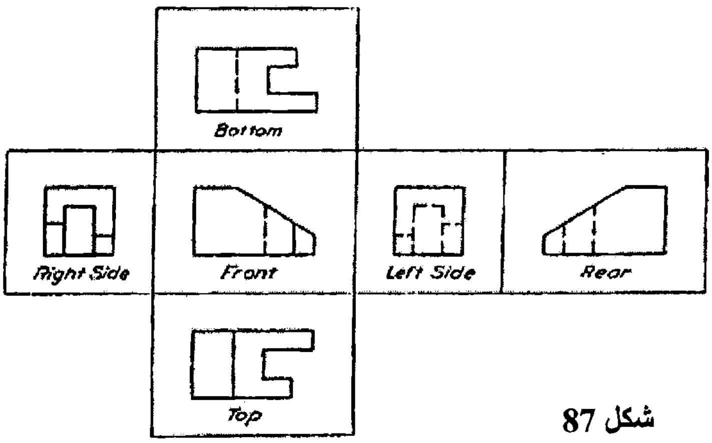
1. يعتمد على الإسقاط للأجسام
2. لايستخدم الإحداثيات السالبة لأنه لاتوجد أبعاد بالسالب كما أنه يصف إسقاط أجسام محددة الأبعاد بناء على وضعها فى الزوايا من خلال القائم بعملية الرسم.

3. يقوم بعملية الإسقاط فى الزاوية الزوجية الأولى أو الثالثة شكل 90- ويعتمد على الركن السالب أو الموجب داخل الزاوية الزوجية تبعا لإتجاه المسقط الجانبى المطلوب سواء كـــان **left hand side** أو **Right hand side** . شكل 87 الإسقاط فى الزاوية الأولى **First angle projection** و شكل 88 يوضح الإسقاط فى الزاوية الثالثة **Third angle projection**. وكذلك فى شكل 89 يوضح الجانبين **left hand side** و **Right hand side** من خلال الإسقاط فى الزاويـــة الأولى ويتضـــح فيـــه الأوضاع الخاصة بالمستوى الجانبى وطبيعة الإسقاط عليه.

Orthographic Projection : First Angle

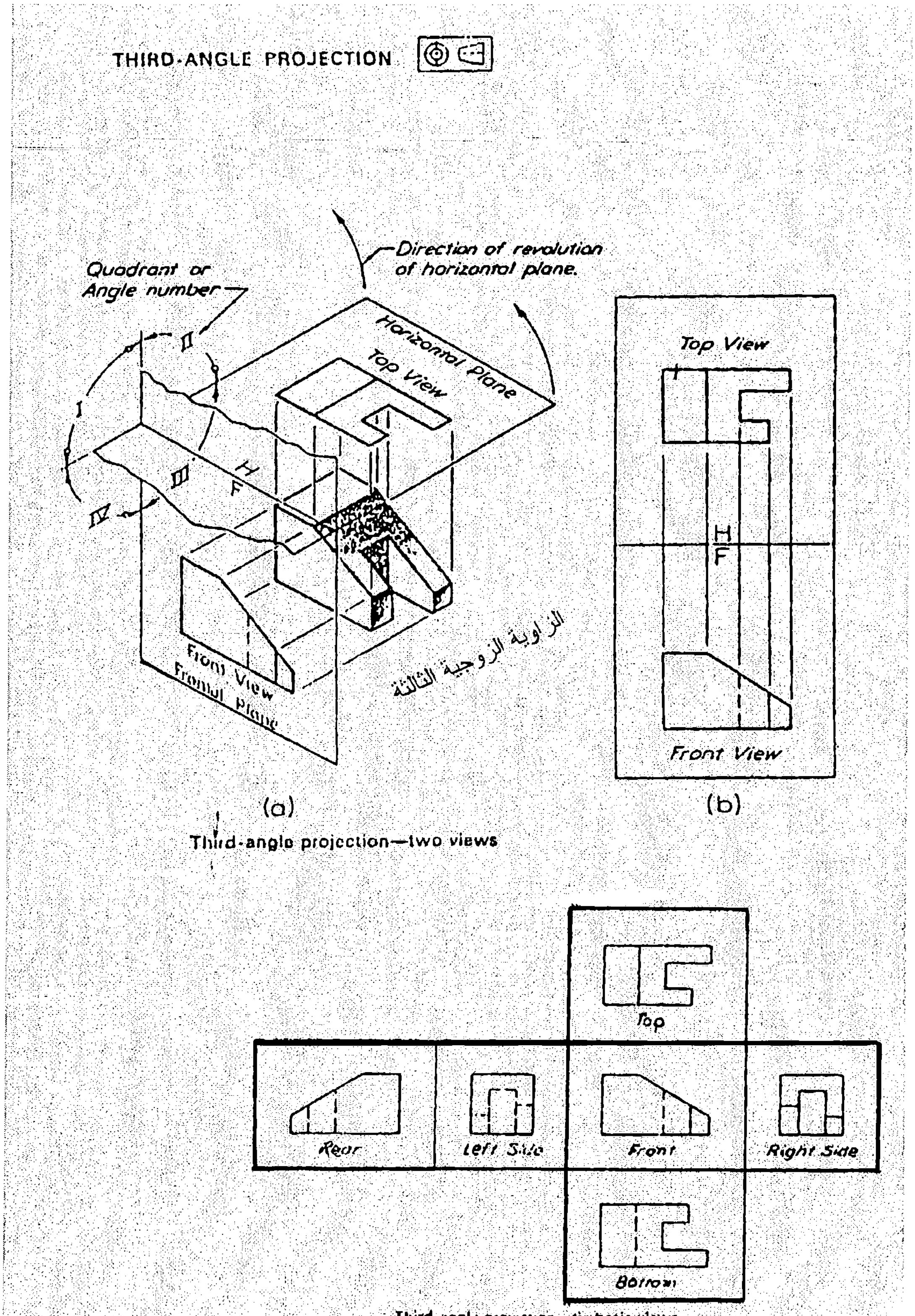


First-angle projection—two views



First-angle projection—six views

شكل 87

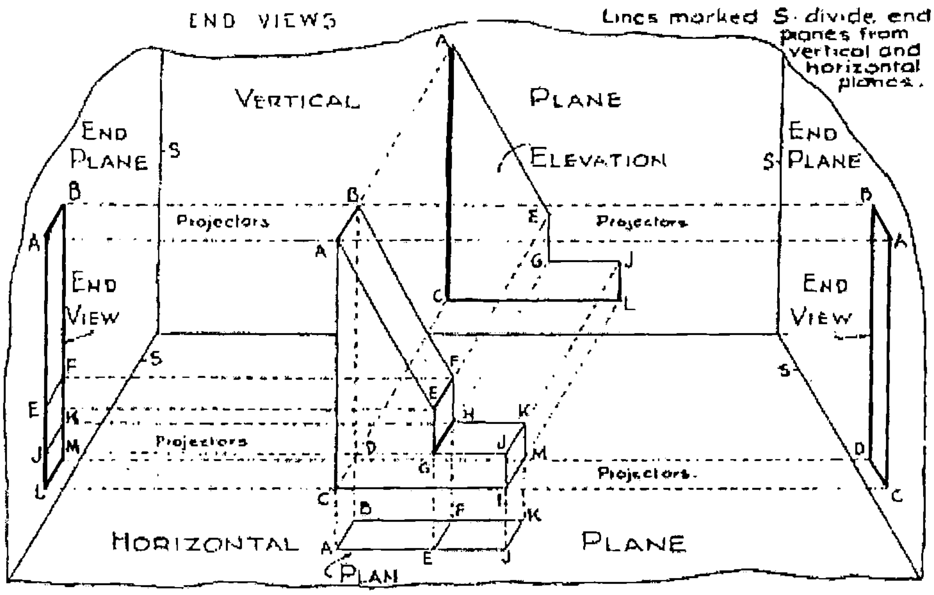


Third-angle projection—two views

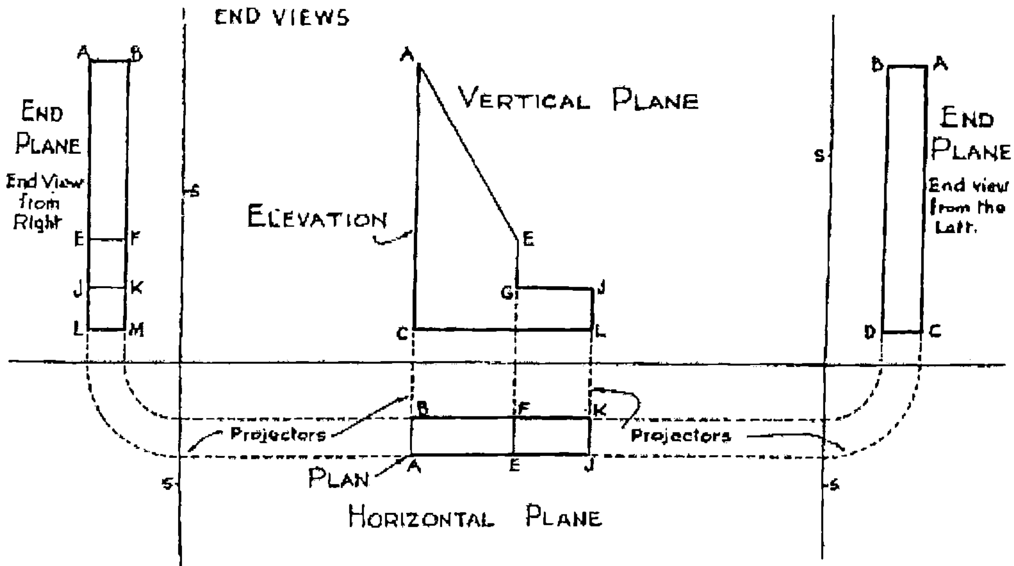
Third-angle projection—six basic views

شكل 88

ORTHOGRAPHIC PROJECTION



1



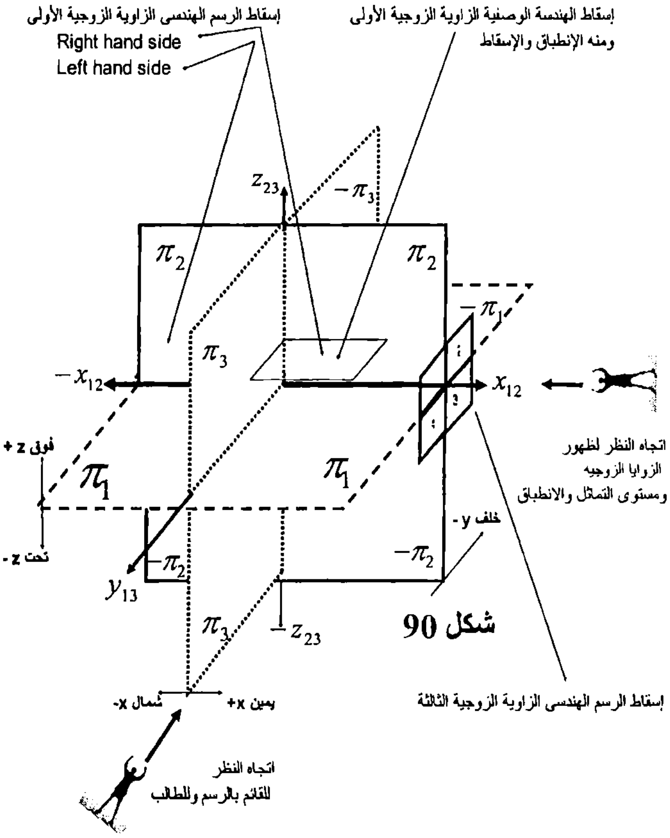
2

شكل 89

أما فى الهندسة الوصفية فهى

1. تُستخدم إسقاط مكونات الأجسام (نقطة– مستقيم – مستوى) وفى بعض الأبواب تستخدم إسقاط الأجسام المنتظمة والمحددة هندسيا مثل المنشور ، والهرم ، والمخروط ، والإسطوانة،....... .

2. تُستخدم الزاوية الزوجية الأولى فى القطاع الموجب منها كمكان محدد عام لإنطباق ودوران المستويات الخاصة بالإسقاط ويتم الإسقاط لجميع النقاط بأوضاعها الحقيقى فى الفارغ سواء كان سالب أو موجب تبعا للمحاور العامة وإحداثياتها. شكل 90



شكل 90

لذلك، كان واجب علينا أن نوضح طبيعة إسقاط المستقيمات بأوضاعها المختلفة داخل نطاق الرسم الهندسى حتى نستطيع التفرقة بينهما.

الأشكال التى سنتعرض لإسقاطها تمت بإستخدام نظام ال **Left hand side** حيث ننظر على الجسم من الشمال ونسقطه ناحية اليمين فى نهاية مرمى البصر على المستوى الجانبى الموجود على يمين الناظر.

شكل 91 – (A) يبين الوضع الفراغى للنقطة بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للنقطة على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات زنلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية لنفس الجسم.

شكل 92 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم العام بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم العام على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم العام.

شكل 93 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم الأفقى بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم الأفقى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم الأفقى.

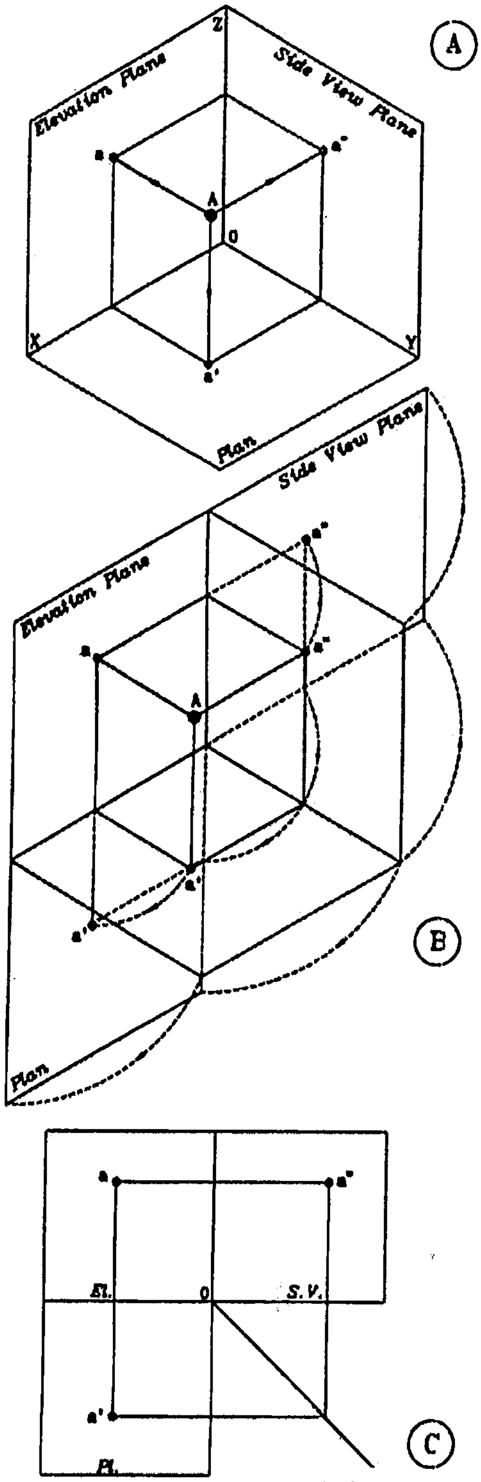
شكل 94 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم الوجهى بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم الوجهى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم الوجهى.

شكل 95 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم الجانبى بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم الجانبى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات زنلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم الجانبى.

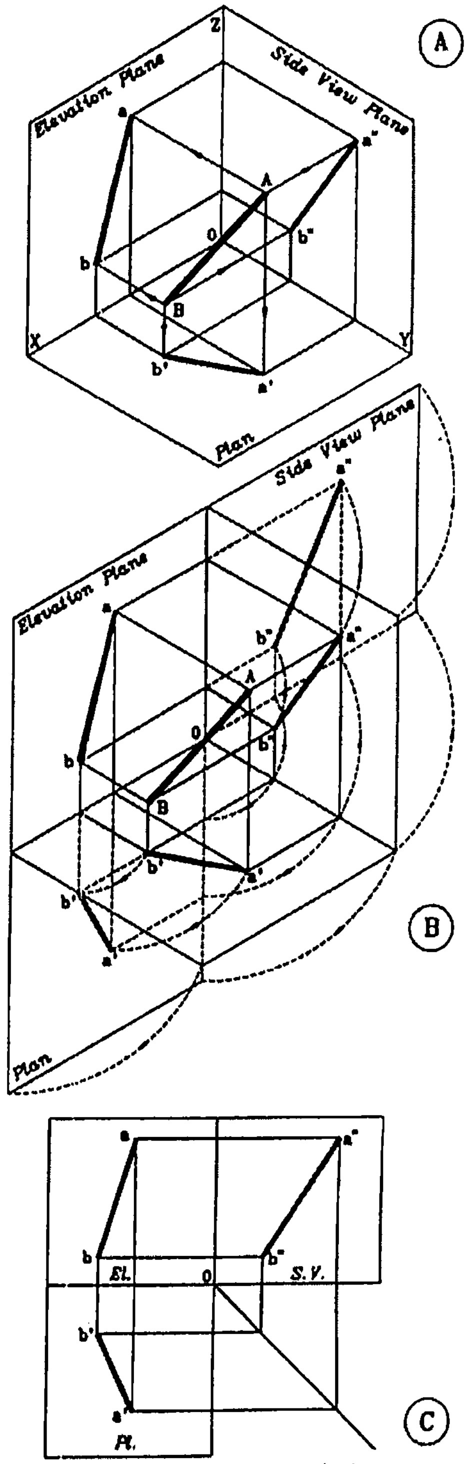
شكل 96 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم العمودى على المستوى الأفقى (مستقيم رأسى) بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم العمودى على المستوى الأفقى (مستقيم رأسى) على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم العمودى على المستوى الأفقى (مستقيم رأسى).

شكل 97 – (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم العمودى على المستوى الرأسى بالنسبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم العمودى على المستوى الرأسى على المستويات الثلاثة ودورانهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم العمودى على المستوى الرأسى.

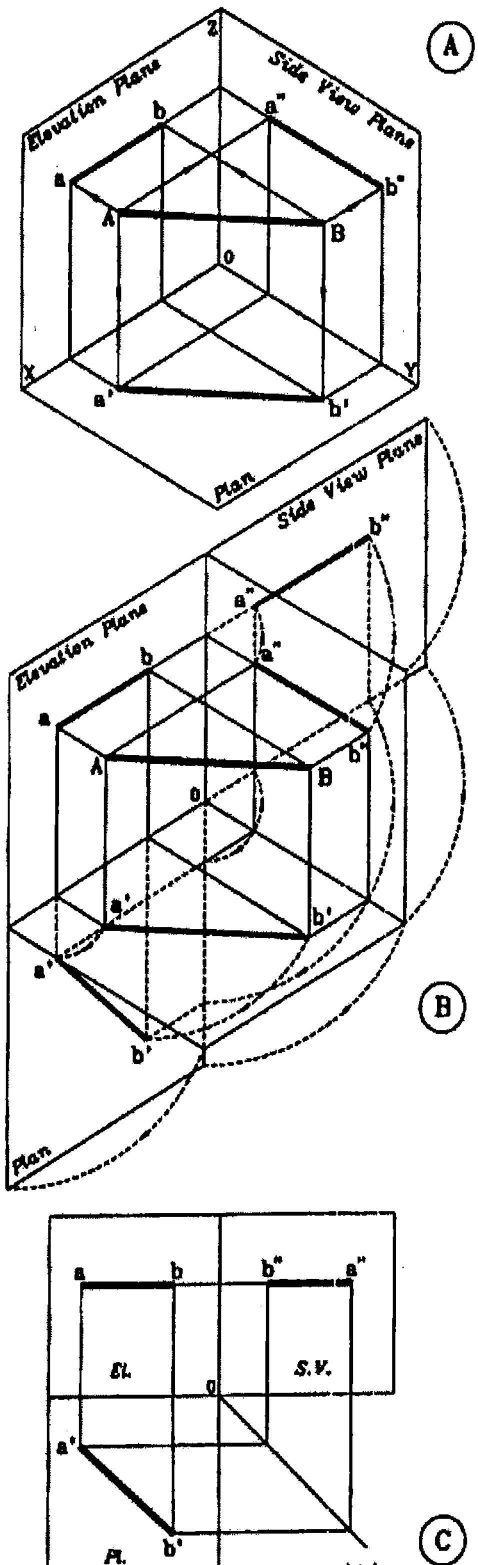
شكل 98 - (A) يبين الوضع الفراغى للمستقيم العمودى على المستوى الجانبى (يوازى خــط الأرض) بالنســبة للمستويات الثلاثة (B) يبين الإسقاط بالنسبة للمستقيم العمودى على المستوى الجانبى (يوازى خــط الأرض) علــى المستويات الثلاثة ودورالهما (C) يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الإسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستقيم العمودى على المستوى الجــانبى (يوازى خط الأرض).

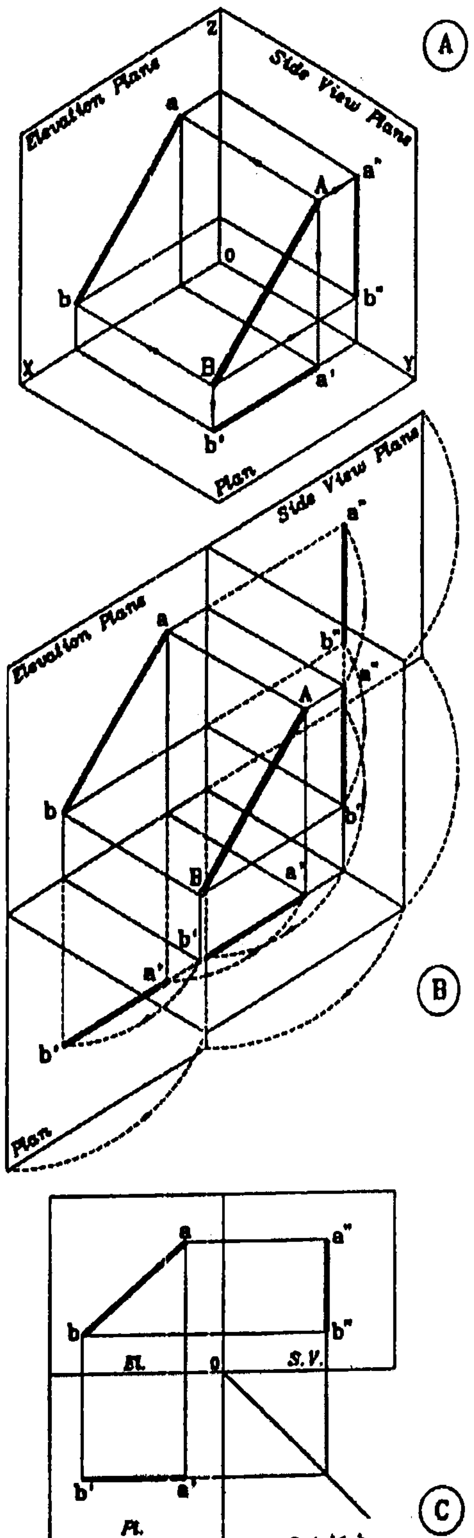

A
Z
Elevation Plane
Side View Plane
a
a"
A
0
X
Y
a'
Plan
B
C
El.
S.V.
Pl.

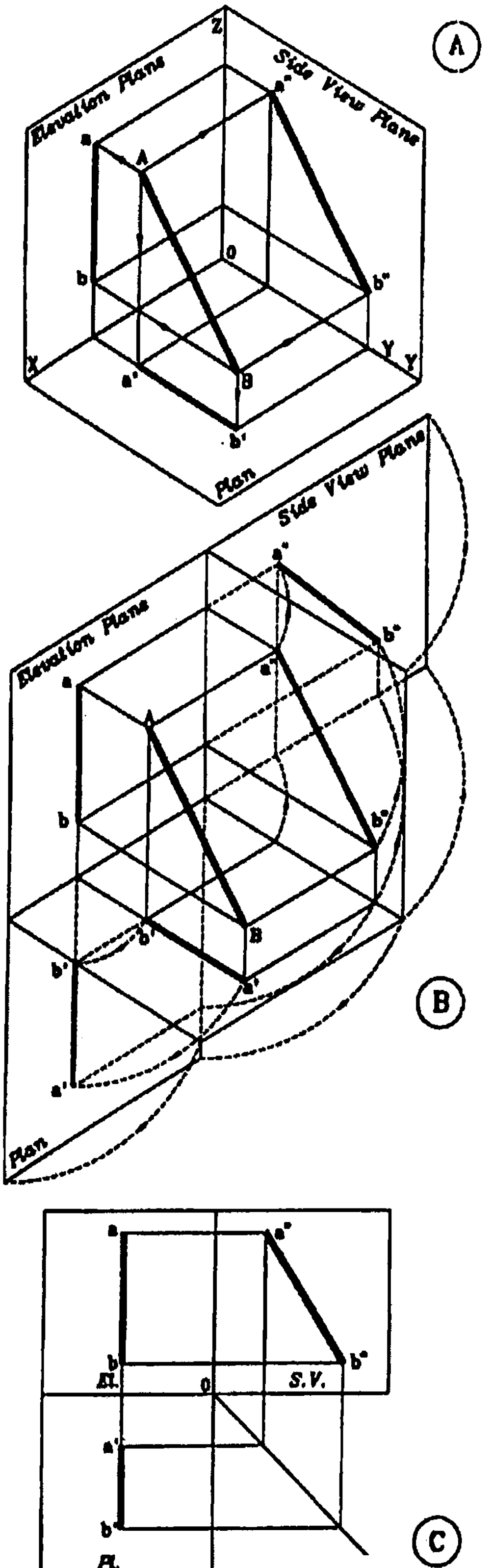
شكل91


A
Z
Elevation Plane
Side View Plane
a
a"
A
0
b
b"
B
X
Y
b'
a'
Plan
B
C
El.
S.V.
Pl.

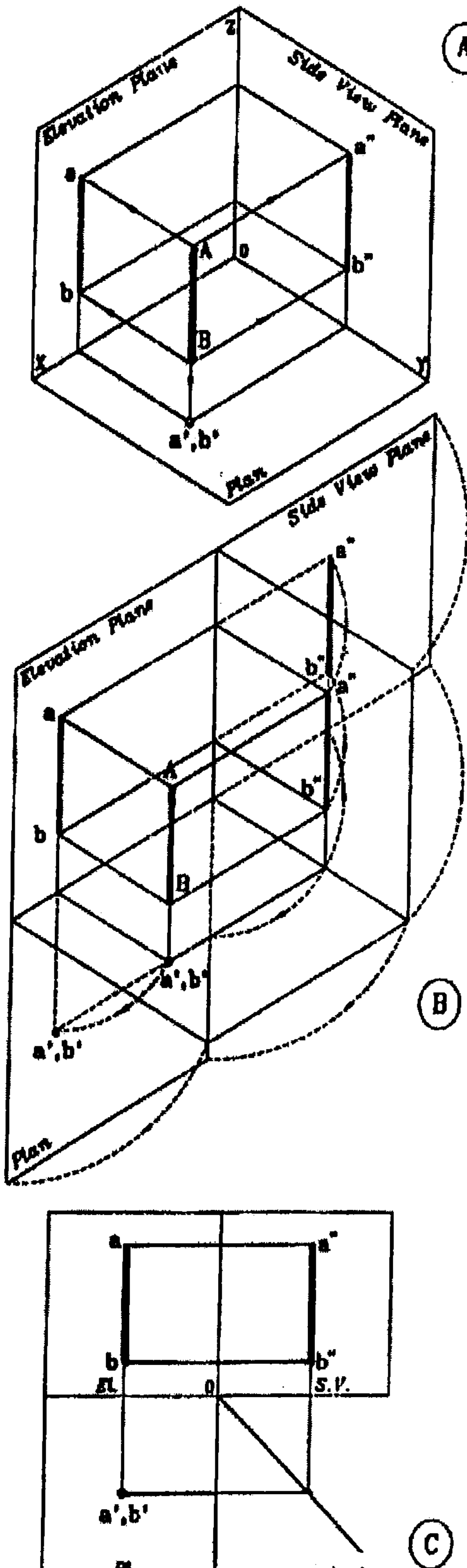
شكل92


A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
Z
X
Y
o
a
b
a"
b"
A
B
a'
b'
B
El.
S.V.
Pl.
C
شكل93

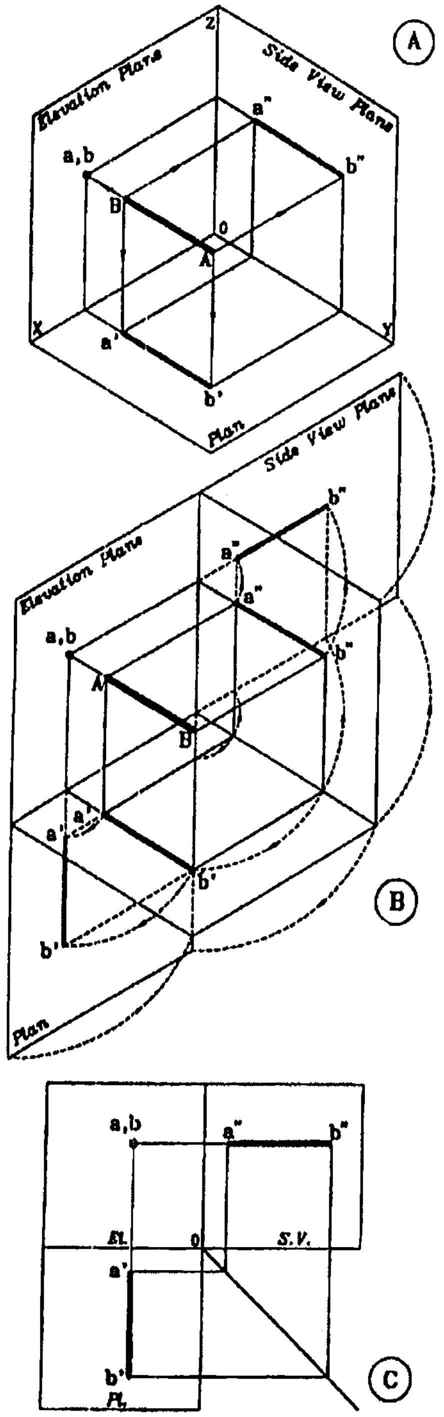

A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
Z
X
Y
o
a
b
a"
b"
A
B
a'
b'
B
El.
S.V.
Pl.
C
شكل94


A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
Z
X
Y
0
a
b
a"
b"
a'
b'
A
B
El.
S.V.
Pl.
C

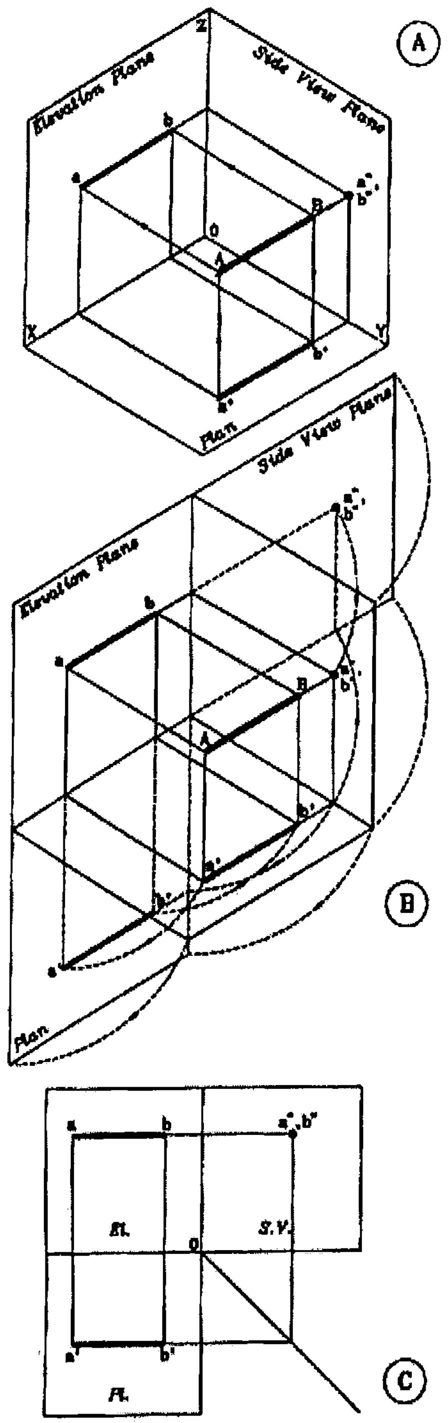
شكل95


A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
Z
X
Y
0
a
b
a"
b"
a',b'
A
B
El.
S.V.
Pl.
C

شكل96


A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
B
C
El.
S.V.
Pl.

شكل97


A
Elevation Plane
Side View Plane
Plan
B
C
El.
S.V.
Pl.

شكل98

تمارين المستقيم

1. عين مسقطي المستقيم **a** المكون من النقطتين **A,B** ثم حدد أثار المستقيم الأفقيه والرأسيه حيث **A(2,5,2)** و **B(7,2,5)** ثم أوجد المسقط الجانبي للمستقيم.
2. عين الاثار الأفقيه والرأسيه للمستقيمات الاتيه وكذلك المساقط الجانبيه لها " تنبيه: لكل مستقيم نقطه اصل منفصله وخط أرض خاص به" :

a [A(2,4,2), B (6,0,0)] و **b [A(1,1,-1), B(5,4,-6)]** و **c [A(1,0,2),B(6,-5,0)]** و
d [A(1,0,2),B(6,0,5)] و **e [A(1,2,0), B (6,5,0)]** و **f [A(1, 3,2), B(5,6,2)]** و
g [A(1,2,3),B(5,2,6)] و **i [A(3,4,4) , B(6,4,4)]** و **l [A(3,2,6), B(3,2,2)]** و
m[A(2,6,2), B(2,2,2)] و **n[A(2,1,2), B(5,3,-2)]** و **q [A(2,2,2), B(6,1,-3)]**

3. عين مسقطي المستقيم **b[A(5,1,-3), B(-2,4,4)]** ثم عين مساقط النقاط الاتيه عليه **C(x,0,z), D(x,y,0), E(x,y,-4), F(x,3,z), G(9,y,z)**
4. المعلوم الاثران الأفقي ولارأسي **V,H** لكل من المستقيمات الاتيه **a[H(1,5), V(6,2)]** و **b[H(1,-5), V(6,2)]** و **c[H(1,5), V(6,-2)]** و **d[H(1,-5), V(6,-2)]** عين المساقط الثلاثه للمستقيمات
5. مثل المستقيم **AB** الواقع في المستوى الأفقي وحدد أثاره إذا كان **A (-4 , -1 ,?) , B (3 , 7 , ?)**
6. مثل المستقيم **AB** الواقع في المستوى الرأسي وحدد أثاره اذا كان **A (-3 , ? , 2) , B (5, ? , 2)** .
7. مثل المستقيم الأفقي **h** في الحالات الاتية :

يمر بنقطة **A (4 , 5 ,2)** ويميل على π_2 بالزاوية $\beta = 60^0$ ثم عين اثره الرأسي

معلوم اثره الرأسي **(2 ,** شكل 86 ويمر بالنقطة **B (5,4 ,?)** .

8. مثل المستقيم الأفقي ***h*** في الحالات الاتية .

يمر بالنقطة **A (4 ,5 , 2)** ويميل على π_2 بالزاوية 60^0 ثم عين اثره **h** ومثل نقطة **B** على **h** والتي تبعد عن **A** مسافة **3 cm** .

اثره الرأسي **V = (2 ,? , 3)** ويمر بالنقطة **B (5, 4 ,?)** .

9. مثل المستقيم الوجهي **f** في الحالات الاتية

بالنقطة **A (2 ,3 , 2)** ويميل على π_1 بالزاوية $\alpha = 60^0$ ثم عين اثره و مثل نقطة **B** على **f** والتي تبعد عن **A** مسافة 3 سم بحيث يكون $Z_B > Z_A$.

اثره الأفقي **H = (2 , 3 , ?)** ويميل على π_1 بالزاوية 60^0

10. معطى نقطة **A (3,2,3)** والمطلوب مستقيم أفقي يميل 30^0 على π_2 ويمر ب **A** ثم عين أثره ونقطة **B** عليه وتبعد **4 cm** عن **A** بحيث يكون $Y_B > Y_A$.

11.معطى نقطة (3, 2 ,3) A والمطلوب تمثيل مثلث ABC , حيث الضلع AB مستقيم أفقي يميل 30^0 على π_2 وطوله 3cm حيث $Y_B<Y_A$ وضلعه BC جانبي يميل 30^0 على π_2 وطوله 3 سم $Z_C>Z_B$.

12.مثل المثلث ABC حيث (4,7,6) A والضلع AB أفقي طوله 4cm يميل 45^0 على π_2 والضلع B C وجهي ويميل على π_1 بالزاوية 60^0 وطوله 5 cm .

13.مثل المثلث الجانبى المتساوى الاضلاع= 3cm والذى فيه نقطه A(5,4,2) ونقطه B(?,3,?)

14.عين مساقط المعين ABCD الذي قطره BD حيث B (7 , 5 , 6) , D (2,5,3) ورأسه A (?,1,7)

15.معطى نقطة (3,2,3) A والمستقيم FE حيث E (4,6,1) , F = (6,1,5) والمطلوب تمثيل متوازي الاضلاع ABCD الذى قطره BD *يقع على المستقيم* FE ، وضلعه AB وجهي و ضلعه AD أفقي .

16.بين ما اذا كانت تقع النقطة N على المستقيم AB ام خارجه

N=(2,1.5,3) , B (0,1,2) , A (4,2,4)

N=(2,2,5) , B (-1,3,5) , A (4,1,5)

17.مثل المربع ABCD حيث , A (3,3,6) B (4.5 ,4 ,5) والضلع AD مستقيم وجهي .

18.مثل متوازي الأضلاع ABCD اذا كانت A (-1,2.5,2) B (0,6,4) D (?,2,?) C (3.5 , ?, 4)

19.مثل المعين ABCD حيث A (6,4,4) B (4,6,1) C (1.5,5,?)

20.مثل المعين ABCD اذا كان القطر AC مستقيم أفقي حيث C(1,?,5) و A (2,6,?) و B (5,0,2) (مساعده : يتم إستخدام الطول الحقيقى للضلع AB مع فرق الZ لل BC نوجد طول المسقط BC نركز به لإيجاد C_1) .

21.عين مساقط المربع ABCD فيه A(1,4,4) وقطره BD يقع على المستقيم الأفقي E (3,1,6), F (0,4,?) .

22.مثل متوازي الأضلاع ABCD اذا كان قطره AC أفقي وطوله 6 سم وقطره BD وجهيا وطوله 8 سم حيث A (2,1,3) C (6,?,?) B (1,?,?)

23.عين مساقط المستطيل ABCD اذا كان A (2,1,2) وضلعه AB 4 سم و BC =3 سم ونقطة N (4,2,3) تقع على القطر AC و معلوم الرأس B (?,?,5)

24.مثل المعين ABCD حيث الذي قطره B (6,7,7) D (2,7,3) ورأسه A (?,3,7)

الباب الخامس

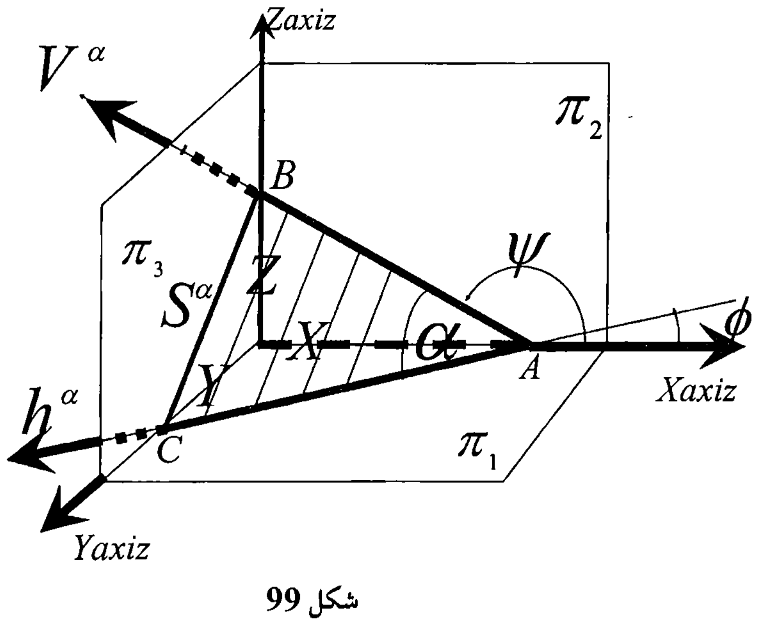
المستوى

المستوى

أقل صور المستوى عامة تظهر عندما يتكون من أى ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة. لذا فإن تمثيل المستوى فى الهندسه الوصفيه يتم إما بمستقيمين على الاقل سواء متقاطعين أو متوازيين أو من خلال أثاره أو نثلاث نقاط **A,B,C** شكل**99**، وأى مستوى له عدة أثار حيث أن أثر المستوى على أي مستوى عام هو خط تقاطعهما معا. وعندما يكون هناك مستوى مثل α فإنة يقطع كل المستويات العامة π_1, π_2, π_3 فى خطوط تسمى أثار المستوى على كـــل منـــهما ونستخدم عامة الرموز $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \pi, \omega, \xi\delta, \rho, ...$ كأسماء للمستويات شكل **99**.

<u>أثار المستوى</u>

والتعريف العام لأثر المستوى <u>هو خط تقاطع المستوى مع مستوى أسمه</u>، حيث أن الأثر الأفقى للمستوى هو خط تقاطع المستوى مع المستوى الأفقى شكل **99**، الأثر الرأسى المستوى هو خط تقاطع المستوى مع المستوى الرأســى، الأثــر الجانبى للمستوى هو خط تقاطع المستوى مع المستوى الجانبى شكل **99**. والأثر للمستوى يتم التعبير عنه بأول حرف من أسم المستوى العام الأفقى أو الرأسى أو الجانبى مرفوع لأس بأسم المستوى. الأثر الأفقي للمســـتوى α هـــو h^α و الأثر الرأسي للمستوى α هو V^α . الأثر الجانبي للمستوى α هو S^α شكل **99** .

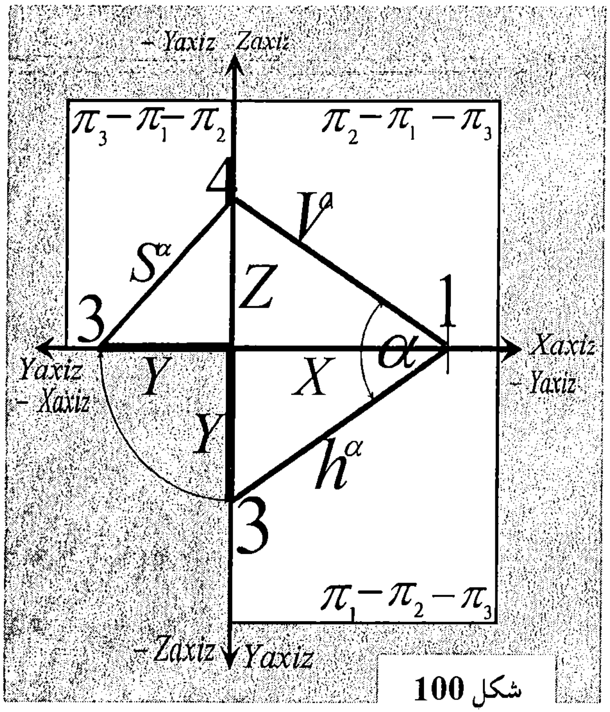


شكل **99**

تمثيل المستوى

تمثيل المستوى بالأثار

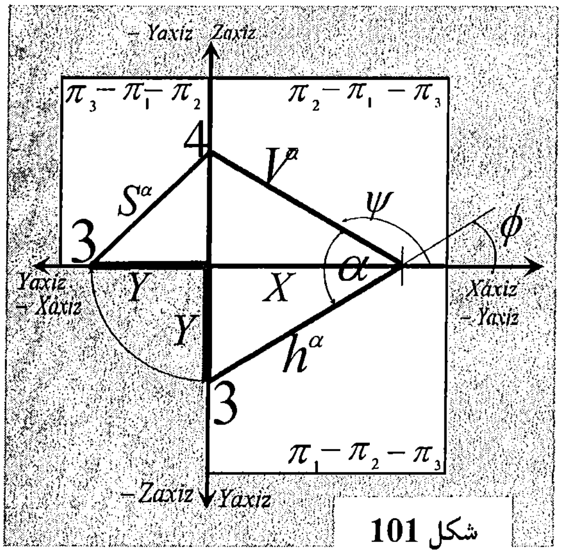
يتم تعريف المستوى بالأثار الخاصة به من خلال إحداثياتة إما بالإحداثيات $\alpha(X,Y,Z)$ أو بزوايا ميل الأثار $\alpha(X,\varphi,\psi)$ شكل **100**.



شكل **100**

1. *التمثيل بعلومية بالإحداثيات*

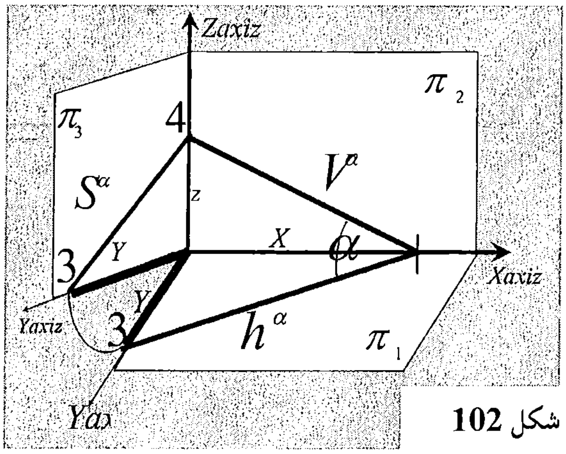
$\alpha(X,Y,Z)$: هي عبارة عن الأجزاء المقطوعة من المحاور الأساسية بداية من نقطة الأصل شكل **100**. نقيس قيمة X على ال X_{Axiz} فتكون نقطة 1 ونقيس قيمة Y على ال Y_{Axiz} فتكون نقطة **3**نصل النقطه **1** بالنقطه **3**فيكون الأثر الأفقى للمستوى ويسمى h^α شكل **100**. نقيس قيم Zعلى Z_{Axiz} فتكون نقطة **4**، نصل نقطه **1**بالنقطة **4** فيكون الأثر الرأسى للمستوى V^α . يتقابل الأثران الأفقي و الرأس في نقطة تقع دائما على خط الأرض X_{12} شكل **100**.



شكل **101**

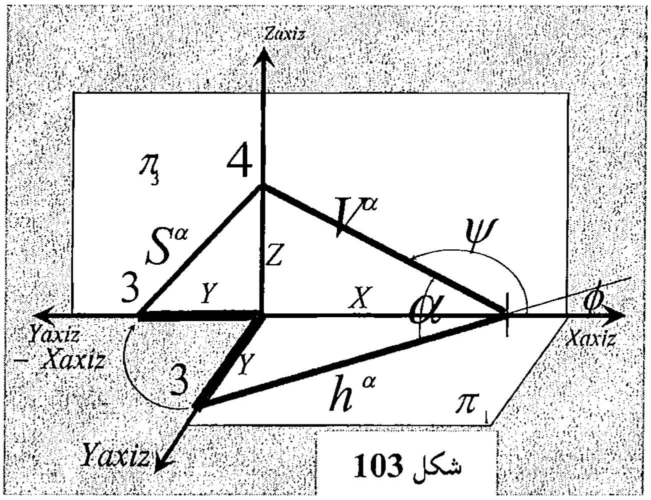
2. *التمثيل بعلومية زوايا ميل الأثار* $\alpha(X,\varphi,\psi)$

: هي عبارة عن الجزء المقطوع من X_{Axiz} مع زوايا ميل الأثار.ويتم بداية من نقطة الأصل نقيس قيمة X على ال X_{Axiz} فتكون نقطة 1 شكل **101** ومن هذه النقطة نقيس قيمة الزاويه الأولى ϕ عكس عقارب الساعة بداية من محور X_{Axiz} فيكون الأثر الأفقى للمستوى ويسمى h^α ونسحبه حتى يظهر فى المستوى



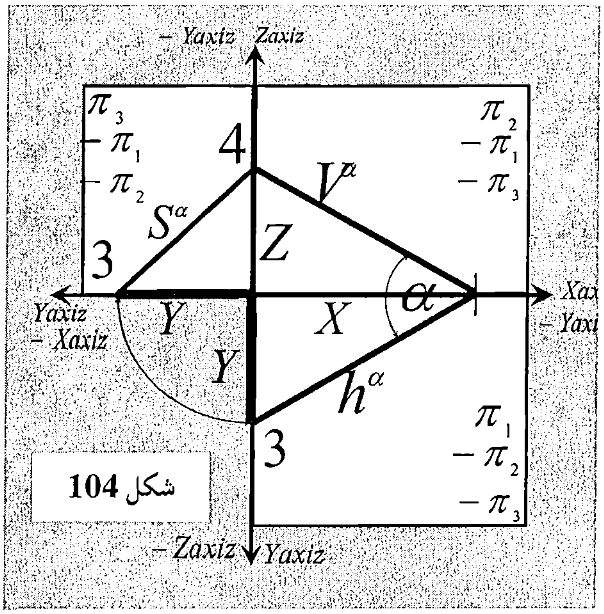
شكل 102

الأفقى. ومن النقطة 1 أيضا نقيس قيمة الزاويه الثانية ψ عكس عقارب الساعة بداية من محور X_{Axiz} فيكون الأثر الرأسى V^{α} (وهذا إسلوب قياس الزوايا عامة فى هذا المنهج أن يتم عكس عقارب الساعة بداية من محور **X**). يتقابل الأثران الأفقي و الرأس في نقطة تقع دائما على خط الأرض X_{12} شكل **101** وكذلك الأثر الرأسى والجانبى فى نقطة واحدة على محور **Z**. من الشكل **101** يتضح مكان الأثر الجانبى الذى ينطلق من دوران نقطة تقاطع الأثر الأفقى مع محور Y_{AXIZ} الرأسى على بعد Y فى محور **Y** الأفقى، وتتصل بنقطة تقاطع الأثر الرأسى مع Z_{Axiz} على بعد Z فى نقطة **4**.



شكل 103

شكل **102** وشكل **103** و شكل **104** يوضحوا كيفية الإنطباق ودوران المستوى الجانبى π_3 والذى يقطع محور Y_{Axiz} إلى نصفين وتنقسم نقطة 3 إلى جزئين ويحملا معا نفس القيمة Y.

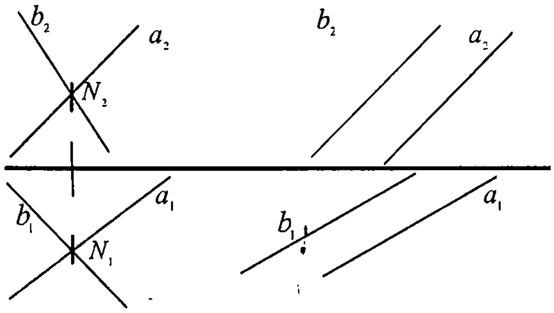


شكل 104

ومن شكل **103** و **104** يمكن أن نتعلم كيفية إستنتاج الأثر الجانبى للمستوى بعد رسم الأثر الأفقى نجده يقطع محور Y_{Axiz} فى نقطة 3 هى نقطة إنطلاق يتم دورانها مع عقارب الساعة على المحور الأفقى

Y_{Axiz} للمستوى الجانبى فتكون نقطة 3 الأخرى والتى يتم توصيلها بنقطة تقاطع الأثر الرأسى مع محور Z_{Axiz} وهى نقطة 4 فيكون الأثر الجانبى شكل **104**.

__نتيجة:__ عندما يكون معلوم الأثر الجانبى S^{α} فإنة يقطع كل من Y_{Axiz} الرأسى فى نقطة 3 تكون هى نقطة إنطلاق h^{α} ندورها عكس عقارب الساعة على المحور الرأسى لمحور Y_{Axiz} ونصلهابنقطة رأس المستوى. ونقطة تقاطع S^{α} مع Z_{Axiz} فى نقطة 4 هى نقطة إنطلاق V^{α} نوصلها بنقطة رأس المستوى. وهذة النتيجـه سـنحتاجها فى التطبيقـات القادمة وتشكل صعوبة بالنسبة للطالب لو لم يتفهمها كما تم شرحها وتطبيقها حرفيا شكل **104**.



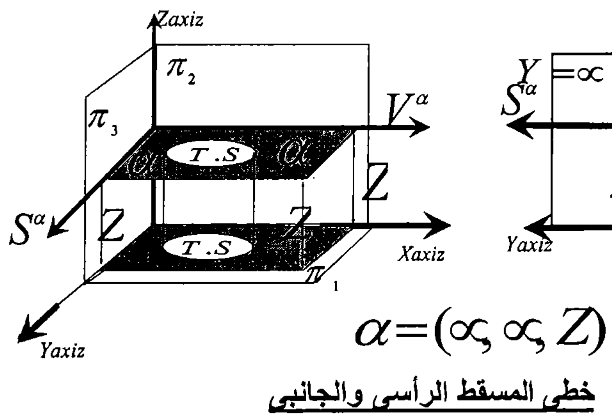
شكل **105**

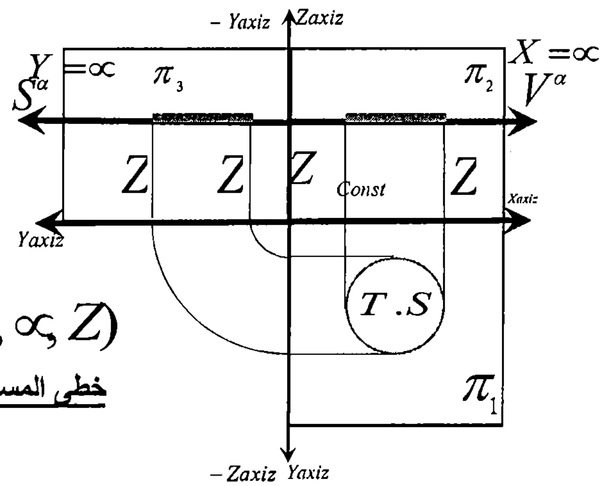
2.2 تمثيل المستوى بمستقيمين

يمثل المستوى بأي ثلاث نقاط ليست على إسـتقامة واحدة أو أكثر أو بأى مستقيمين متقاطعين أو متوازيين شكل **105** .

الأوضاع الخاصة للمستوى

1. المستوى الأفقى: يوازى المستوى الأفقى π_1/خطى المسقط الرأسى والجانبى



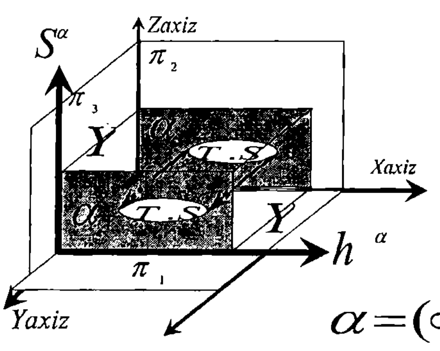


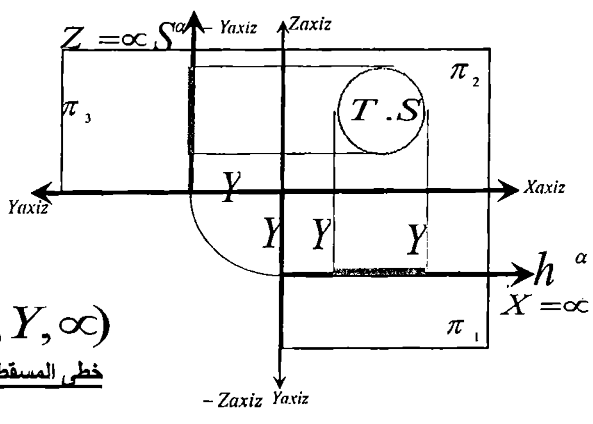
شكل **106**

يتضح من شكل 106 كيفية وضع المستوى بالنسبة للمستويات العامه حيث يرتفع فوق π_1 بمسافه ثابتة وهى قيمـــة Z وهى ثابته بالنسبه لجميع النقاط التى تقع فى المستوى. ونجد أن المستوى الأفقى يقطع π_1 فى خط هو يوازى محـــور X هو الأثر الرأسى V^{α} والمسقط الرأسى لجميع النقاط التى تقع فى هذا المستوى تقع على V^{α} وبالتالى طالمـــا جميـــع النقاط مسقطها فى المستوى الرأسى على خط واحد فإن هذا المستوى يطلق علية خطى المسقط الرأسى شـــكل 106، وكذلك يقطع المستوى الجانبى π_3 فى خط هو الأثر الجانبى للمستوى S^{α} والذى يوازى محور Y الأفقى والمســـقط الجانبى لجميع النقاط التى تقع فى هذا المستوى تقع على S^{α} وبالتالى طالما جميع النقاط مسقطها فى المستوى علـــى خـــط واحد فى المستوى الجانبى فإن هذا المستوى يطلق علية خطى المسقط الجانبى.وعامة المستوى العمودى على مستوى فهو خطى المسقط عليه.

والأن عرفنا كيفية وضع المسقط الرأسى والجانبى لجميع النقاط التى تقع فى هذا المستوى الأفقـــى، ويبقـــى الأن المسقط الأفقى لجميع النقاط، ونلاحظ أن الأشكال التى تقع فى هذا المستوى تُسقط بشكلها الحقيقى كما هى موجوده فى الهندسة المستويه، فمثلا الدائره الواقعه فى المستوى α مسقطها فى المستوى الأفقى دائره كما هى بشـــكلها الحقيقـــى. وبالتالى يجب عليك عزيزى الطالب أن تنظر إلى الشكل 106 وتتعلم طبيعة المستوى الأفقى فى الإســـقاط وتســـتوعبه وتحفظة جيدا. وبالتالى تكون قيم تمثيل المستوى هى $\alpha(\infty,\infty,Z)$ (ويكفى لتمثيله نقطة واحدة معرفة فيه وخاصة الإرتفاع Z)

2. المستوى الوجهى: الموازى للمستوى الرأسى π_2 / خطى المسقط الأفقى والجانبى





$$\alpha=(\infty,Y,\infty)$$

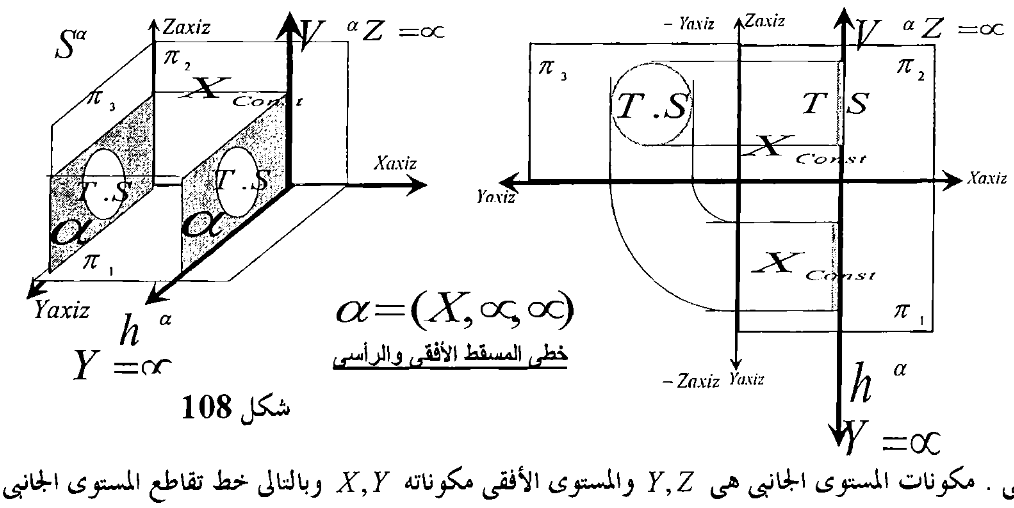
خطى المسقط الأفقى والجانبى

شكل 107

هذا المستوى تنطبق عليه القواعد التى تم ذكرها بالنسبه للمستوى الأفقى ولكن بالنسبة إلى المستوى الرأسى π_2 . حيث أن المستوى الوجهى شكل **107** الموازى ل π_2 هو عمودى على π_1, π_3 وبالتالى فهو خطى المسقط علـــى π_1, π_3 . ومكونات المستوى الوجهى الذى يوازى π_2 هى X, Z وبالتالى كما تعلمنا سابقا من المستوى الأفقى، مادام المستوى يوازى أحد المستويات العامه فإن أثاره تكون موازيه لإحاثيات مكوناته، وقيمة إحداثياته فى إتجاهها بمالانهايه فى المستوى الذى يتقاطع معه. كمثال المستوى الوجهى مكوناته **X,Z** وهو عمودى على π_1, π_3 والمستوى العام π_1 ومكوناتـــه **X ,Y** وبالتالى فإن أثر المستوى الوجهى فى المستوى الأفقى يكون فى لإتجاه خط تقاطع المستويين وهو العنصر المشترك فى إحداثياهم وهو محور X وبذلك يكون h^{ε} موازى لمحور X –شكل **107**. ومن الشكلين يتضح أيضـــا بـــنفس القاعده أن الأثر الجانبى يكون فى إتجاه محور Z لأنه العنصر المشترك بين المستويين. وبذلك يكون المســـتوى الـــوجهى خطى المسقط الأفقى والجانبى لأنة عمودى عليهما. والمسقط الرأسى لجميع النقاط التى تقع فيه تظهر بشكلها الحقيقى فى π_2 . وبالتالى تكون قيم تمثيل المستوى هى $\alpha(\infty, Y, \infty)$.(ويكفى لتمثيله نقطة واحدة معرفة فيه وخاصة البعـــد **Y**)

.3 المستوى الجانبى : موازى للمستوى الجانبى π_3 / خطى المسقط الأفقى والرأسى

مما سبق ذكره ومن شكل **108** فإن المستوى الجانبى عمودى على كل من π_1, π_2 لذا فهو خطى المســـقط الأفقـــى



شكل **108**

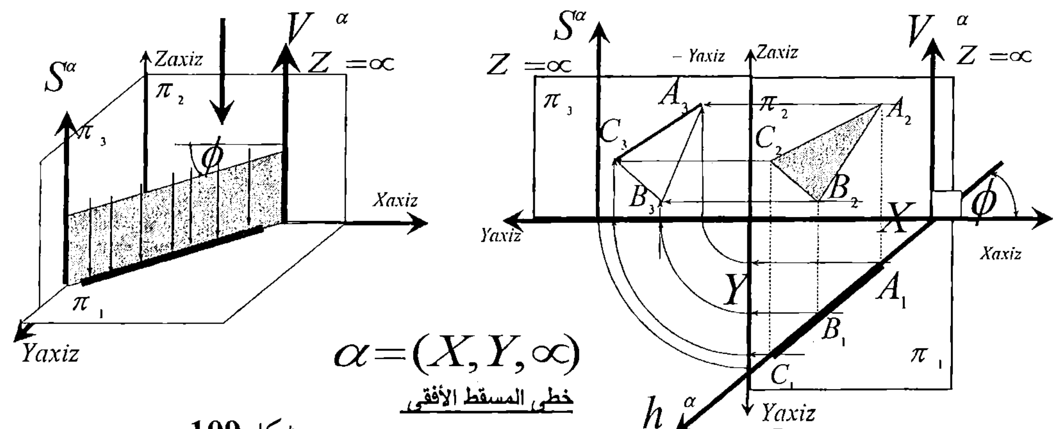
والرأسى . مكونات المستوى الجانبى هى Y, Z والمستوى الأفقى مكوناته X, Y وبالتالى خط تقاطع المستوى الجانبى مع

المستوى الأفقى وهو الأثر الأفقى للمستوى الجانبى h^{α} يتبع العنصر المشترك فيما بينهما وهو خط تقاطعهما وهو محور Y، وبالتالى $h^{\alpha} // Y$. مكونات المستوى الجانبى هى Y,Z والمستوى الرأسى مكوناته X,Z وبالتالى خط تقاطع المستوى الجانبى مع المستوى الرأسى وهو الأثر الرأسى للمستوى الجانبى V^{α} يتبع العنصر المشترك فيما بينهما وهو خط تقاطعهما وهو محور Z، وبالتالى $V^{\alpha} // Z$. والمسقط الجانبى لجميع النقاط التى تقع فيه تظهر بشكلها الحقيقى فى π_3.

وبالتالى تكون قيم تمثيل المستوى هى $\alpha(X,\infty,\infty)$، (ويكفى لتمثيله نقطة واحدة معرفة فيه وخاصة البعد X).

4. المستوى الرأسى / عمودى على π_1 / خطى المسقط الأفقى

من الشكل **109** يظهر المستوى العمودى على π_1 وبالتالى فهو خطى المسقط الأفقى وله أثر أفقى h^{α} وهـذا الأثـر يحمل زاوية ميله على π_2 وهى ϕ ويقطع محور Y فى نقطه هى قيمه Y للمستوى، وكذلك يقطع محور X فى نقطه هى رأس المستوى وبالتالى Y و X معرفين لهذا المستوى. ومن النظريات السابقة حيث α عمودى على π_1 والمستوى العام π_2 عمودى على π_1 ولذلك فإن خط تقاطعهما عمودى على π_1 وهو الأثر الرأسى للمستوى وهـو $V^{\alpha} // Z$ وتكون قيمة Z فى تعريف المستوى بمالانهايه أما X,Y معرفتين. والمستوى π_3 عمـودى علـى π_1 وبالتـالى لأن $\alpha \perp \pi_1$ فإن خط تقاطع α مع π_3 يكون عمودى على خط تقاطع π_1 مع π_3 وهو محور Z وهذا مايثبت مـره أخرى أن قيمه Z للمستوى بمالانهايه.

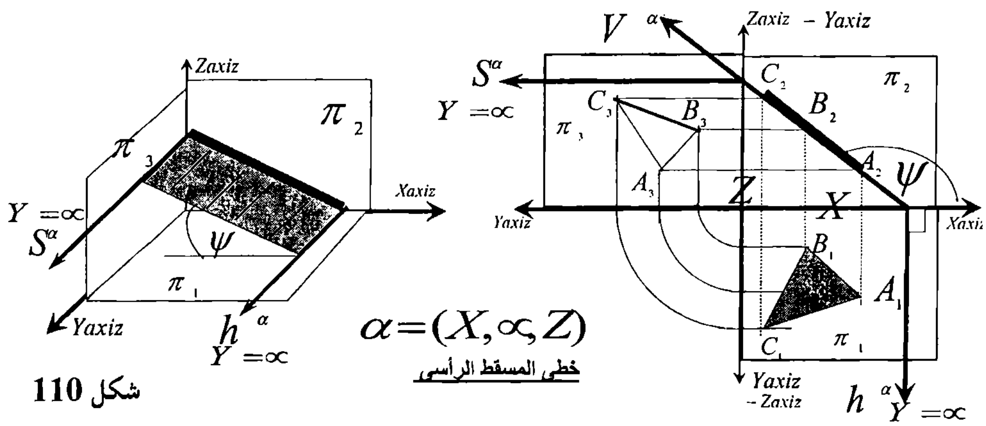


شكل 109

وبالتالى تكون قيم تمثيل المستوى هى $\alpha(X,Y,\infty)$ أو بالتمثيل الـــزاوى لزوايـــا الميـــل علـــى كـــل مـــن π_1 و π_2 وهو $\alpha(X,\phi^\circ,90^\circ)$. ومن الملاحظات الهامه التى لاغنى عن معرفتها هى أن هذا المستوى خطى المسقط الأفقـــى أى أن جميع النقاط الواقعة فيه مساقطها الأفقيه تقع على هذا الخط، وأيضا لومعلوم مسقط أفقى لنقطتين تقع فى المستوى فإنـــه يمكن رسم الأثر الأفقى مباشره منها بتوصيلهما ورسم الأثر الرأسى عمودى على خط الأرض. (ويكفى لتمثيله نقطـــة واحدة معرفة فيه وخاصة البعد **Z** مع زاوية ميل المستوى على المستوى الرأسى)

5. المستوى العمودى على π_2 / خطى المسقط الرأسى

من الشكل **110** يظهر المستوى العمودى على π_2 وبالتالى فهو خطى المسقط الرأسى وله أثر رأسى V^α وهذا الأثر يحمل زاوية ميله على π_1 وهى ψ ويقطع محور Z فى نقطه هى قيمه Z للمستوى، وكذلك يقطع محور X فى نقطه هى رأس المستوى وبالتالى Z و X معرفين لهذا المستوى. ومن النظريات السابقة لنأتى بالأثر الأفقى للمستوى نجد أن α عمودى على π_2، والمستوى الأفقى العام π_1 عمودى على π_2 ولذلك فإن الأثر الأفقى للمستوى عمودى على خط تقاطعهما (على خط تقاطع π_1 مع π_2 وهو $\mathbf{X_{12}}$) ويكون الأثر الأفقى للمستوى $h^\alpha // Y$ وتكـــون قيمـــة Y فى



شكل 110

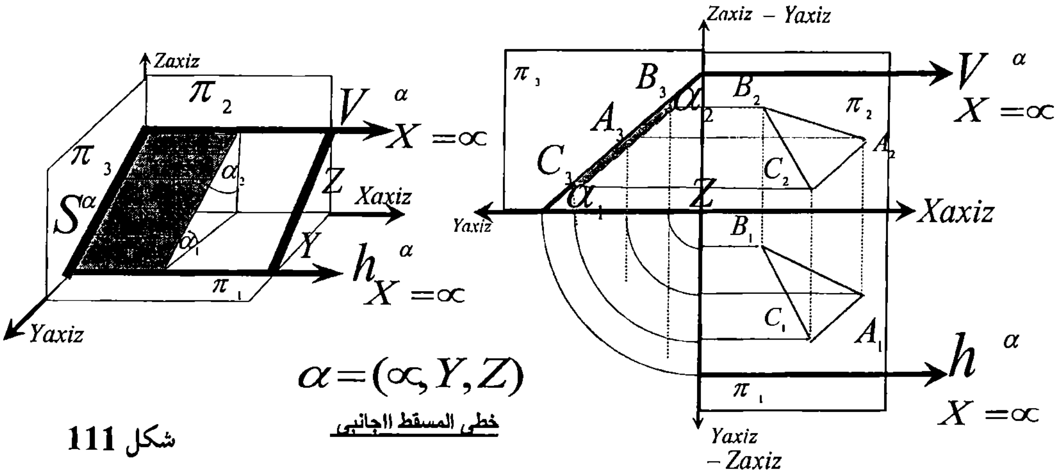
تعريف المستوى بمالانهايه أما X,Z معرفتين. والمستوى π_3 عمودى على π_2 وبالتالى لأن $\alpha \perp \pi_2$ فإن خط تقـــاطع α مع π_3 عمودى على خط تقاطع π_2 مع π_3 وهو محور Y وهذا مايثبت مره أخرى أن قيمه Y للمستوى بمالانهايه.

وبالتالى تكون قيم تمثيل المستوى هى $\alpha(X,\infty,Z)$ أو بالتمثيل الـــزاوى لزوايـــا الميـــل علـــى كـــل مـــن π_1 و π_2

وهو $\alpha(X,90°,\psi°)$. ومن الملاحظات الهامه التى لاغنى عن معرفتها هى أن هذا المستوى خطى المسقط الرأسى أى أن جميع النقاط الواقعة فيه مساقطها الرأسيه تقع على هذا الخط، وأيضا لومعلوم مسقط رأسى لنقطتين تقع فى المستوى يتم توصيلهما ويكون هذا هو الأثر الرأسى مباشره منها ثم رسم الأثر الأفقى عمودى على خط الأرض. (ويكفى لتمثيلـــه نقطة واحدة معرفة فيه وخاصة البعد **Y** مع زاوية ميل المستوى على المستوى الأفقى)

6. المستوى العمودى على π_3/يوازى خط الأرض/خطى المسقط الجانبى

هذا المستوى يمتد فى إتجاه محور X وبالتالى أثاره الأفقيه والرأسيه توازى خط الأرض أما مسقطه الجانبى خطى المسقط الجانبى وإحداثياته $\alpha(\propto,Y,Z)$ وقيمه $X=\propto$ تعن أن الأثار توازى محور X_{12} وهذا المستوى يميـــل فى المســـتوى الجانبى على كل من π_1 بزاويه α_1 بين المستوى ومحور **Y** ويميل على π_2 بزاويه α_2 بين المستوى ومحور **Z**. شـــكل **111**. هذا المستوى خطى الجانبى ويتم رسمه كخطى من المسقط الجانبى أى من رقم ثلاثه لأى نقطة واقعة فى المســـتوى كما بالمثال اللاحق شكل **112** .

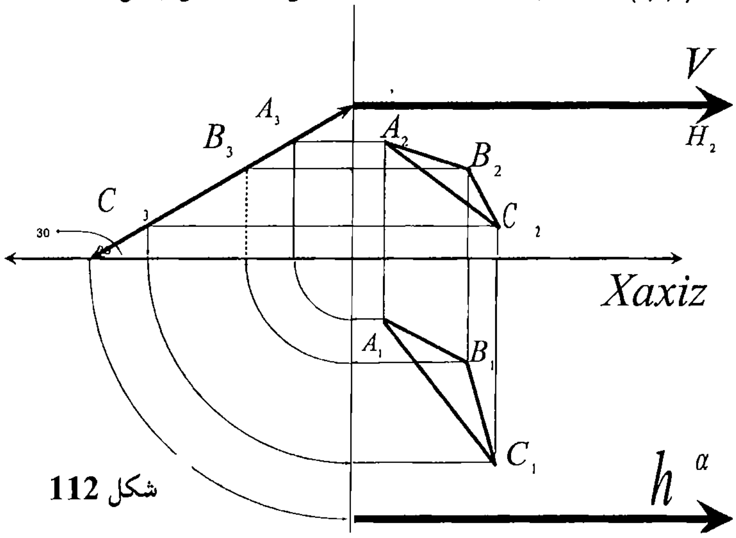


شكل **111**

معرفه كيفية إستنتاج الأثر الأفقى والرأسى لهذا المستوى :

بعد رسم خطى المسقط الجانبى نجد أن خطى الجانبى يقطع محور Z الرأسى فى نقطة هى دائما نقطه إنطـــلاق V^α ثم يقطع محور Y الأفقى فى نقطه يتم دورانها عكس عقارب الساعة على محور Y الرأسى فتكون نقطه إنطـــلاق للأثـــر الأفقى للمستوى h^α مثال شكل **112**.

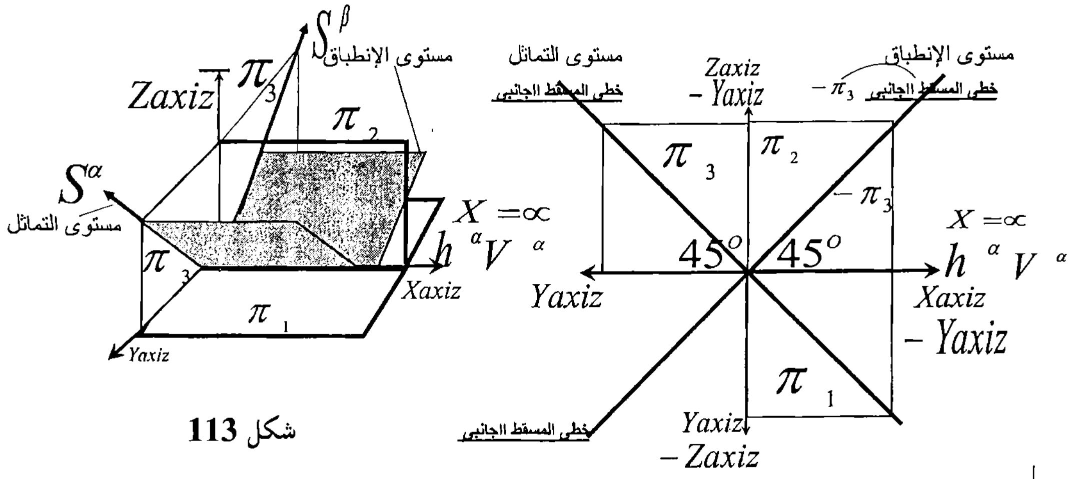
مثل المثلث ABC العمودى على المستوى الجانبى الذى فيه A (1,2,3) B (4,3.5,?)
C (5,1,?) وأن مستوى المثلث يميل 30 درجة على المستوى الأفقى وإستنتج أثار المستوى



شكل 112

7. مستوى التماثل: المستوى المنصف الأول: منصف الزوايا الزوجية الأولى والثالثه.

هذا المستوى منصف الزاويا الزوجية الأولى والثالثه حيث يميل على كل من π_1 بزاويه α_1 ويميل على π_2 بزاويه α_2 والزاويتين α_1 و α_2 تساوى كل منهما 45°، وهو خطى المسقط الجانبى ويمر بخط الأرض "مستوى عمودى على π_3 خطى المسقط الجانبى" . من شكل 113 نجد أن هذا المستوى يقطع كل من π_1 و π_2 فى خط الأرض وبالتالى أثاره الأفقيه والرأسيه منطبقة على خط الأرض. ومن الملاحظ أن جميع النقاط التى تقع فى مستوى التماثل قيمة Y تساوى قيمة Z بإشاراقا حيث $\pm Z = \pm Y$.



شكل 113

8. المستوى الموازى للتماثل:

مستوى التماثل خطى المسقط الجانبى وأى مستوى يوازيه يكون خطى المسقط (الجانبى)، وعليه فإن المستوى المـــوازى للتماثل خطى المسقط الجانبى ويمر بالمسقط الثالث لأى نقطه تقع فى المستوى ويتم رسمه كخطى من نقطـــة C_3 أو B_3 شكل **114** . هذا المستوى فى ذلك الوقت يقطع π_1 فى h^α ويقطع π_2 فى V^α والمطلوب إستنتاج كـــل مـــن h^α و V^α :ويتم الإستنتاج من القاعدة السابقة الخاصة بخطى المسقط الجانبى كما بالمثال شكل **114** يتم رسم خط المسقط الجانبى الموازى للتماثل من C_3 فيقطع محور Y الأفقى فى نقطه 1 يتم دورالها بالرجوع على محور Y الرأسى فتكون $1'$ وتكون نقطه إنطلاق h^α موازى لخط الأرض. أما خطى المسقط الجانبى فيقطع محور Z فى نقطه 2 هى مباشرة نقطـــه إنطلاق V^α موازىلخط الأرض. ونفس السلوك بالنسبه للمستوى الموازى للتماثل من B_3

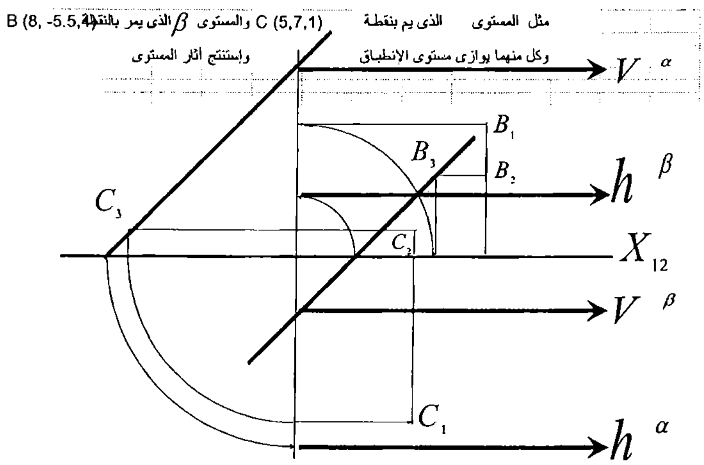
نتيجه: دائما h^α و V^α للموازى للتماثل منطبقين على بعض.

9. مستوى الأنطباق

هذا المستوى منصف الزوايا الزوجية الثانية والرابعه حيث يميل على كل من π_1 بزاويه α_1 ويميل على π_2 بزاويه α_2 والزاويتين α_1 و α_2 تساوى كل منهما 45°، وهو خطى المسقط الجانبى ويمر بخط الأرض. من شكل **113** نجـــد أن هذا المستوى يقطع كل من π_1 و π_2 فى خط الأرض وبالتالى أثاره الأفقيه والرأسيه منطبقة على خط الأرض. ومـــن الملاحظ أن جميع النقاط التى تقع فى مستوى الإنطباق قيه Y تساوى قيمه Z بعكس إشاراتها حيث $Z \, ^{-}_{+} = \, ^{+}_{-}Y$.

المستوى الموازى للأنطباق:

مستوى الإنطباق خطـــى المســـقط الجانبى وأى مستوى يوازيه يكـــون خطى المسقط (الجانبى)، وعليه فإن المستوى الموازى الإنطبـــاق يكـــون خطى المسقط الجانبى ويمر بالمســـقط الثالث لأى نقطه تقع فيه وعند رسمه



شكل **115**

من نقطة C_3 أو B_3 شكل**115**. هذا المستوى فى ذلك الوقت يقطع π_1 فى h^α ويقطع π_2 فى V^α والمطلوب إستنتاج كل من h^α و V^α :ويتم الإستنتاج من القاعدة السابقة الخاصة بخطى المسقط الجانبى كما بالشكل السابق **114** :

يتم رسم خط المسقط الجانبى الموازى للإنطباق من C_3 فيقطع محور Y الأفقى فى نقطه يتم دورا لها بالرجوع عكس عقرب الساعة على محور Y الرأسى فتكون هى نقطه إنطلاق h^α موازى لخط الأرض. أما خطى المسقط الجانبى فيقطع محور Z فى نقطه هى مباشرة نقطه إنطلاق V^α موازىلخط الأرض. ونفس السلوك بالنسبه للمستوى الموازى للإنطباق من B_3 .

<u>نتيجه: دائما h^αو V^α للموازى للإنطباق لايكونوا منطبقين على بعض.</u>

<u>نتائج عامة</u>

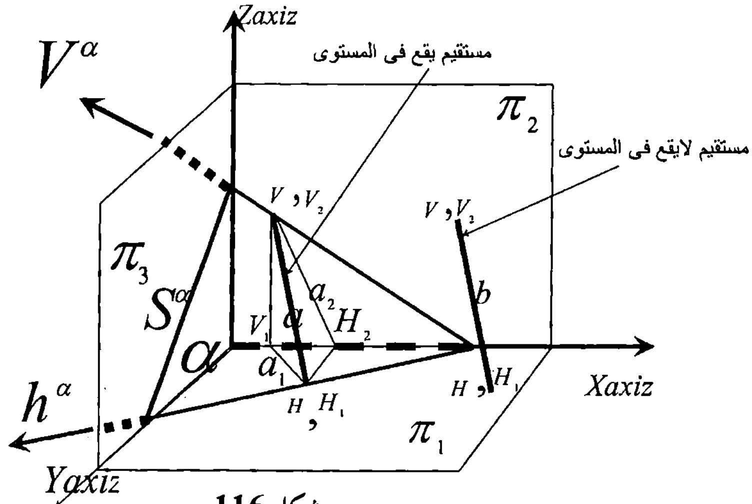
1. المستوى العمودى على مستوى فهو خطى المسقط عليه.

2. المستوى الذى يوازى المستوى العام تكون إحاثياتة بمالانهايه فى إتجاه مكونات المستوى العام. أى أن أثاره تكون موازيه لمكونات المستوى العام للإسقاط؛ وكمثال- المستوى الأفقى العام مكوناته هى المحاور X,Y وبالتالى فإن المستوى الذى يوازيه مكوناته مثله وعليه فإن الأثار طالما توازى المحاور العامه فإن إحداثيات أثارها بمالانهاية فى إتجاه هذه المحاور وتوازيها وتبدأ من الإرتفاع المعلوم لوضع المستوى. ولتمثيل V^α و h^α لابد أن تكون قيمة الإرتفاع Z لهم معلومه حتى يتم رسم المحاور منها.

3. فى المستويات التى توازى المستويات العامه ننظر إلى إسم المستوى ونرى مكوناتة (مثلا X,Y) فتكون <u>بمالانهايه</u> فى الرموز المستخدمة لتعريف المستوى أما الإحداثى الباقى فيكون معروف. ومن هنا يمكن تعريف المستوى الأفقى على أنة المستوى $\alpha(\infty,\infty,Z)$.

4. المستوى خطى المسقط يتم رسمة بزاويه ميله من مسقط أى نقطه فيه فى إتجاه خطى المسقط (المستوى خطى المسقط الأفقى يتم رسمه من مسقط أفقى لنقطة تقع فى المستوى أى يحمل رقم واحد، المستوى خطى المسقط الرأسى يتم

رسمه من مسقط رأسى لنقطة أى يحمل رقم أثنين، المستوى خطى المسقط الجانبى يتم رسمه من مسقط جانبى لنقطة أى يحمل رقم ثلاث).



شكل 116

علاقـــة المســتقيم بالمســتوى الواقع فيه

صديقى الطالب: أرجوك إحضــر أدواتك وأبدأ تنفيذ ماسيتم شرحه حتى تستطيع تفهم هذة العلاقــات لأنها هامــه جــدا وتعتــبر قلــب العمليات الوصفيه القادمه.

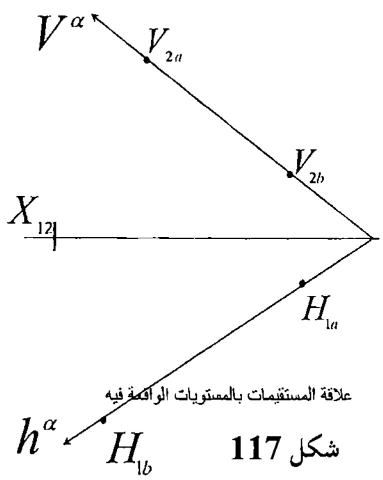
1-أرسم أى مستوى ممثل بالأثار h^α و V^α

2-أنظر للشكل الفراغى المرسوم شكل **116** تجد أن المستقيم **b** عامة ليس له علاقه بالمستوى α حيث لايقع فيــه والسؤال الأن متى يقع المستقيم فى المستوى.

شرط وقوع مستقيم عام فى المستوى: لكى يقع مستقيم عام فى المستوى ننظر لشكل **116** نجد المستقيم **a** يقع فى المستوى وذلك لأن الأثر الأفقى للمستقيم **a** يقع على الأثر الأفقى للمستوى (H_1 / h^α) وكذلك الأثر الرأســى للمستقيم **a** يقع على الأثر الرأسى للمستوى (V_2 / V^α) كما فى شكل **116**. ومن هنا يمكن تلخيص شرط وقــوع مستقيم عام فى المستوى فى هذه القاعدة والتى أسميناها القاعده الذهبيه رقم واحد.

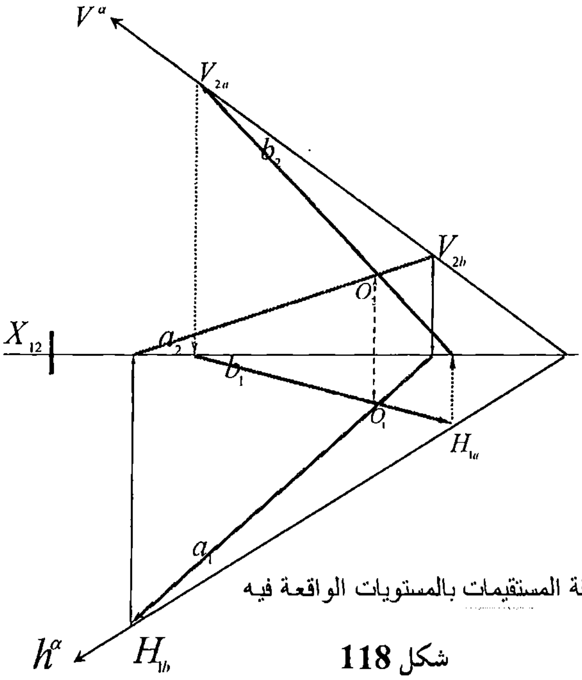
ذهبيه **1**: شرط وقوع مستقيم عام فى الستوى هى H_1 / h^α و V_2 / V^α

ومن هنا نستخرج **تعريف جديد للأثر الأفقى والرأسى**: الأثــر الأفقى للمستوى هو المحل الهندسى لكل الأثار الأفقية لكل المستقيمات الواقعة فى المستوى. الأثر االرأسى للمستوى هو المحل الهندسى لكــل الأثار الرأسية لكل المستقيمات الواقعة فى المستوى. ومن هذه القاعدة يمكن رسم المستوى كما فى **117** . يمكن الأن إختيار أى نقطه علــى الأثر الرأسى تكون أثر رأسى لأى مستقيم **a** واقع فى المستوى ولانعلم



علاقة المستقيمات بالمستويات الواقعة فيه
شكل **117**

مساقطه حتى الأن،وكذلك أى نقطه على الأثر الأفقى تكون أثر أفقى لأى مستقيم **a** واقع فى المستوى ولانعلــم مســاقطه أيضاحتى الأن. ومن هذه الأثــار يمكــن إستنتاج المساقط لهذا المســتقيم المعلــوم أثاره بإستخدام قاعدة أسقط عمود ووصل كا بالشكل **118**. ونكرر التجربه مــر أخرى لمستقيم أخر **b** فى المستوى كما فى شكلى **117-118** . ولو لاحظت الأن يصبح لدينا مستقيمين واقعين فى المستوى



علاقة المستقيمات بالمستويات الواقعة فيه
شكل **118**

ويجب أن نلاحظ فى شكل **118** أن المستقيمين **b,a** تقاطعا فى نقطة واحدة على خط تناظر واحد وهذا أصبح إثبــات أن أى مستقيمين متقاطعين فى نقطه يمثلوا مستوى ويحققوا العلاقه الذهبيه رقم واحد.

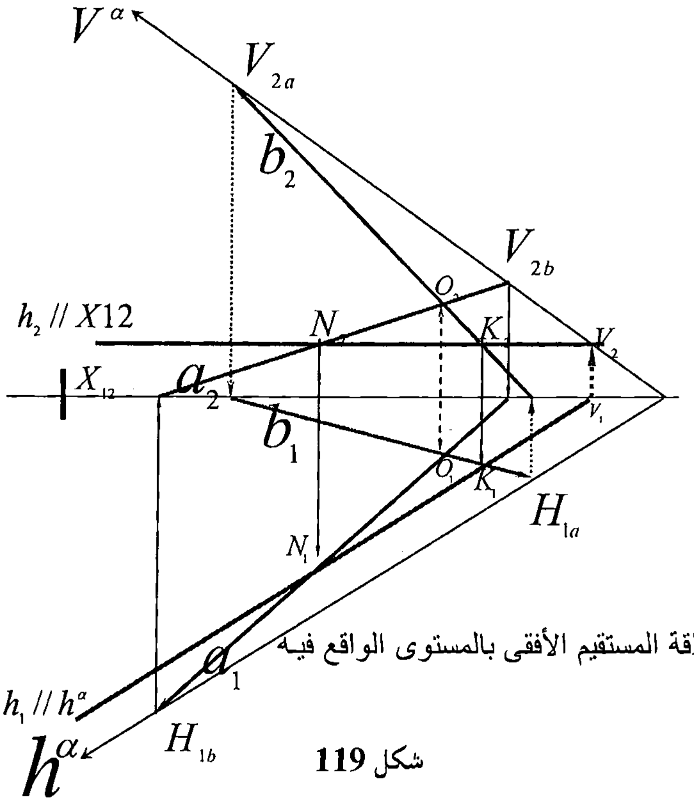
ومن هنا لو أخذنا عكس الشكل **118**حيث المستوى بدا بمستقيمين متقاطعين فكيف يمكن تمثيل المستوى؟؟؟ والإجابــه بسيطه وهى أن نحصل على الأثر الأفقى H_1 لكل مستقيم ونوصلهم ببعض فيكون الأثر الأفقى للمستوى، وكــذلك نحصل على الأثرين الرأسيين للمستقيمين V_2 ونوصلهم فيكون الأثر الرأسى للمستوى. وعليه تكون هناك نتيجه وهى:

لإستنتاج الأثار الناقصة للمستوى الممثل بمستقيمين يتم الحصول على الأثرين الأفقين H_1 لأى مستقيمين **b,a** بالاضافه الى أثر رأسي واحد V_2 لأى منهم ، أو إثنين V_2 بالاضافه الى واحد H_1 لأنهم سيحصلوا على نقطه تلاقى الأثار مع خط الأرض.

<u>إستنتاج علاقة المستقيم الأفقي بالمستوى الواقع فيه:</u>

إعتماد على أن أى مستقيمين واقعين فى المستوى يتقاطعا فى نقطة واحده، وكذلك الإعتماد على نظريه التوليد فإنه يمكن تمرير مسقط لمستقيم ما وإستنتاج المسقط المناظر له. ونحن الأن نريد أن نوجد علاقة المستقيم الأفقي بالمستوى:

نمرر مسقط رأسى لمستقيم أفقى وهو يوازى خط الأرض $h_2 // X_{12}$ كما فى شكل **119**.



علاقة المستقيم الأفقى بالمستوى الواقع فيه

شكل **119**

بالإعتماد على نظرية التوليد فإن h_2 بعد تمريره يقطع كل من a_2 فى N_2 ويقطع b_2 فى K_2 وعلى ذلك بإسقاط كل من N_2 و K_2 نأتى ب N_1 على a_1 و نأتى ب K_1 على b_1 وبذلك يكون N_1 K_1 هو h_1 وبذلك نكون ولدنا المسقط الأفقى للمستقيم الأفقى ونلاحظ بمجرد الإستنتاج أن $h_1 // h^\alpha$ وهذا أهم جزء فى القاعدة المستنتجة. ويتم إستخدام نظرية التوليد لإستنتاج المساقط الناقصه عندما يكون المستوى ممثل بمستقيمين. ولكن بعد تمرير وإستنتاج المساقط

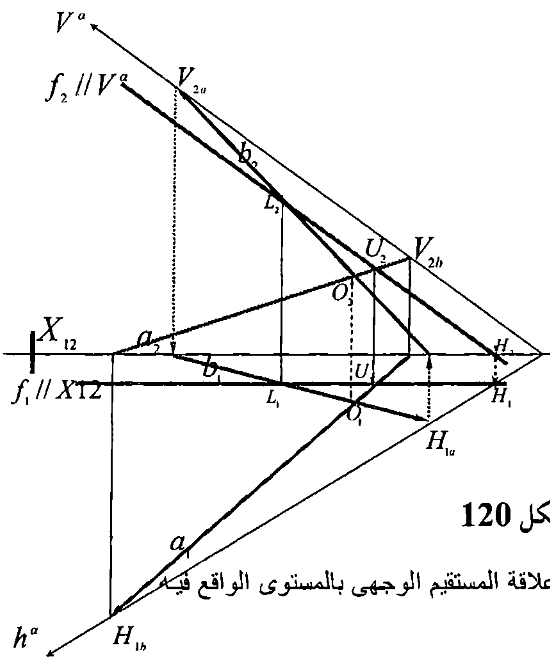
للمستقيم الأفقى نلاحظ أنه له علاقة بالأثار للمستوى الواقع فيه وهى أن V_2 / V^α و أن $h_1 // h^\alpha$ وبـذلك نكـون أستنتجنا علاقة المستقيم الأفقى بالمستوى الواقع فبه من شكل **119** وهى :

ذهبيه 2: علاقة المستقيم الأفقى بالمستوى الواقع فبه $\underline{h_2 // X_{12}} \pm \underline{V_2 / V^\alpha} \pm \underline{h_1 // h^\alpha}$

وهذة القاعده أطلقنا عليها الطريق الموازى " سكة العميان" لأنها لاتستخدم إلا إذا توافر أثار المستوى وهى لها تعريفها لسهولة إستخدامها وهى: الطريق الموازى أو " سكة العميان" أو موازى عمودى موازى: ويتم الفظ بها كالأتى: موازى لخط الأرض عمودى علىخط الأرض موازى للأثر والعكس صحيح شكل **119** . وأطلقنا عليه : الطريق الموازى" سكة العميان" لأنك تدخل المستوى موازى لخط الأرض حتى تصطدم بالأثر ثم عمودى علـى خـط الأرض حـتى تصطدم به ثم موازى للأثر وتخرج خارج المستوى والعكس صحيح. وهذا يشبه دخول غرفه مظلمـه والأصـطدام بحوائطها والخروج منها دون علم هنها أى شيء.ومن ما سبق وبعكس التمرير يمكنك أن تجرب تمرير مستقيم وجهـى وإستنتا ج العلاقة بنفسك وهى علاقة المستقيم الوجهى بالمستوى شكل**120**.

ذهبيه 3: علاقة المستقيم الوجهى بالمستوى الواقع فيه $\underline{f_1 // X_{12}} \pm \underline{H_1 / h^\alpha} \pm \underline{f_2 // v^\alpha}$

وهذه العلاقه ينطبق عليها كل من **نظريه التوليد والطريق الموازى وسكة العميان..**



شكل 120

علاقة المستقيم الوجهى بالمستوى الواقع فيه

إسـتخدامات المسـتقيمات الأفقيـة و الوجهية

1- كل مستوى يوجد بـه مئـات بـل ملايـين المستقيمات الوجهية والافقيـة ولكـن المسـتقيم المطلوب يعتمد على النقطة التى يجب ان يمـر بهـا وعلية لو هناك اى نقطة فانه لا يمـر بهـا سـوى مستقيم أفقي واحد و وجهـي واحـد وبالتـالي بالإستعانة بالمستقيمات الوجهية أو الافقية يمكن أن

نأتى بالإحداثيات الناقصة بالنسبة للنقاط كما سنرى فى أمثلة قادمة.

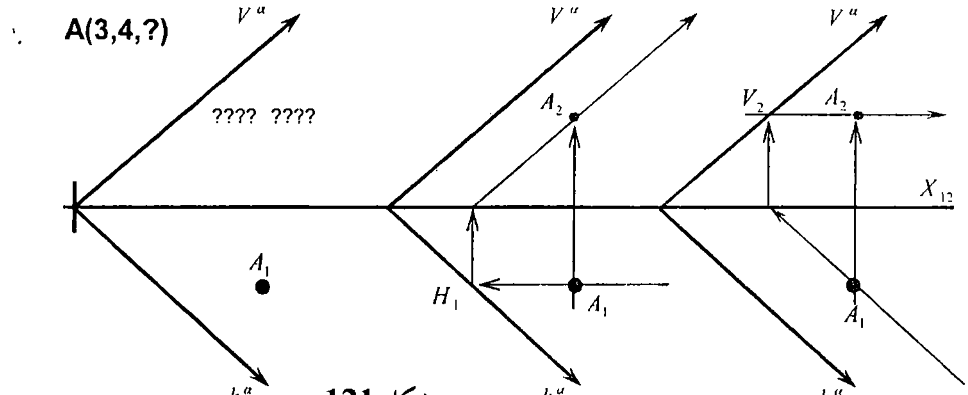
2- أي أثر للمستوى يمكن إيجادة إذا عُلم أثرين لمستقيمين واقعين فية. فبمعلومية الأثرين الأفقيين لمستقيمين فى المستوى فإنه يمكن أن نوقع الأثر الأفقي للمستوى بتوصيلهما ومدهما حتى يتقاطعا مع خط الأرض وكذلك بالنسبة للأثار الرأسية . عند عدم وجود أثار المستوى ومطلوب تحديدها نبحث عن وجود لأى مستقيم أفقى واقع فى المستوى بذلك نكون قد علمنا إتجاه الأثر الأفقى ويمكن رسمه حينئذ من أى أثر أفقى لأى مستقيم أخر واقع فى المستوى وكذلك بالنسبة للمستقيم الوجهى فبمجرد وجوده نكون عرفنا إتجاه الأثر الرأسى للمستوى ويبقى حينئذ أى أثر رأسى لمستقيم أخر واقع فى المستوى لنرسم منه الأثر الرأسى للمستوى.

إيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط

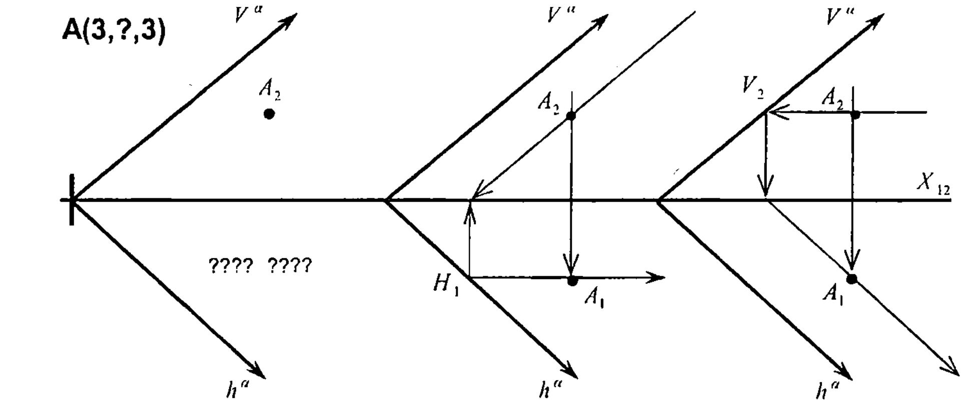
من علاقة المستقيم بالمستوى فقد عرفنا أن أى نقطة فى المستوى لايمر بها سوى مستقيم أفقى واحد (على أرتفاع Z المعرف للنقطة) ، وكذلك مستقيم وجهى واحد على بعد Y معروف للنقطة. وكذلك من علاقة النقطة بالمستقيم الواقعة عليه أن المسقط الأفقى للنقطة يقع على المسقط الأفقى للمستقيم وأيضا المسقط الرأسى للنقطة يقع على المسقط الرأسى للمستقيم. بناء على ذلك فإنه إذا كان المسقط A_1 لنقطة A يقع علي مسقط أفقى لمستقيم أفقى h_1 فى المستوى فإن A_2 تقع على المسقط الرأسى للمستقيم الأفقى h_2. لذلك لو أن النقطة تقع فى أى مستوى وكان معلوم منها مسقط ومجهول الاخر فأنه يتم عمل الأتى:

لو أن المستوى ممثل بالأثار

1. لومعلوم A_1 والمجهول A_2 كما بالشكل 121 (أىYمعلومة و Z مجهولة للنقطة) فإنه يتم تمرير مستقيم أفقى أو وجهى إعتماد على إتجاه أثار المستوى المعروفةكما بالشكل 121 . وكذلك فى شكل 122المعلوم A_2 والمجهول A_1 (أىZ معلومة و Yمجهولة للنقطة) يتم تمرير مستقيم أفقى أو وجهى كما بالشكل 122.
2. لو أن المجهول الإحداثى X هو المجهول لابد أن يتم تمرير مستقيم أفقى ومستقيم وجهى معا " لان أى نقطة لايمر بها سوى مستقيم أفقى واحد وكذلك مستقيم وجهى واحد) الاثنين معا عندما يتقاطعا يحددا موقع النقطة الصحيح وقيمة X)



شكل 121 تمرير وجهى تمرير أفقى



شكل 122 تمرير وجهى تمرير أفقى

الشكلين **121**و **122** يوضح فى الحالة الاولى كيفية إستنتاج المسقط الرأسى لنقطة $A(3,4,?)$ بتمرير مستقيم أفقى أو وجهى نتيجه لعدم وجود **Z** ، وكذلك الحاله الثانية لنقطة $A(3,?,3)$ المجهول فيها **Y** وإستخدام المستقيمات الافقية والوجهيه. وبنفس الاسلوب يتم إستخدام المستقيمات الأفقية والرأسيه إذا كان المستوى ممثل بمستقيمين سواء متقاطعين او متوازيين حيث وضح كيفية التمرير اذا ماكان أى من A_1, A_2 معلوم كيف يتم إستنتاج المسقط الاخر.

لو أن المستوى ممثل بمستقيمين

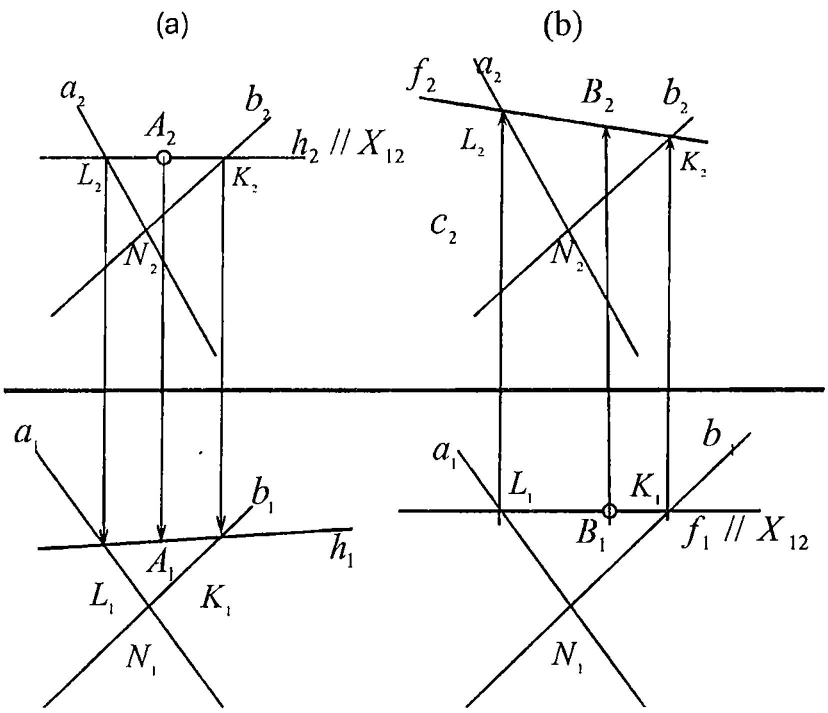
3. لومعلوم A_1 والمجهول A_2 (أى **Z** مجهولة للنقطة) فإنه يتم تمرير مستقيم وجهى إعتماد على إتجـاه مسـقط المستقيم الوجهى فى المستوى الأفقى وهو يوازى خط الأرض شكل **123**
4. لومعلوم A_2 والمجهولA_1 (أى **Y** مجهولة للنقطة) فإنه يتم تمرير مستقيم أفقى إتجاه مسقط المستقيم الأفقى فى المستوى الرأسى وهو يوازى خط الأرض شكل **123**

5. لو أن المجهول الإحداثى X هو المجهول لابد أن يتم تمرير مستقيم أفقى ومستقيم وجهى معا إعتماد على قيمة كل من z,y . لان أى نقطة لايمر بها سوى مستقيم أفقى واحد وكذلك مستقيم وجهى واحد، والاثنين معا عندما يتقاطعا يحددا موقع النقطة الصحيح ويحددا قيمة X ، كما بالمثال القادم شكل 124

مثال: مثل النقطتين A(3,?,5) و B(3.5,6,?)

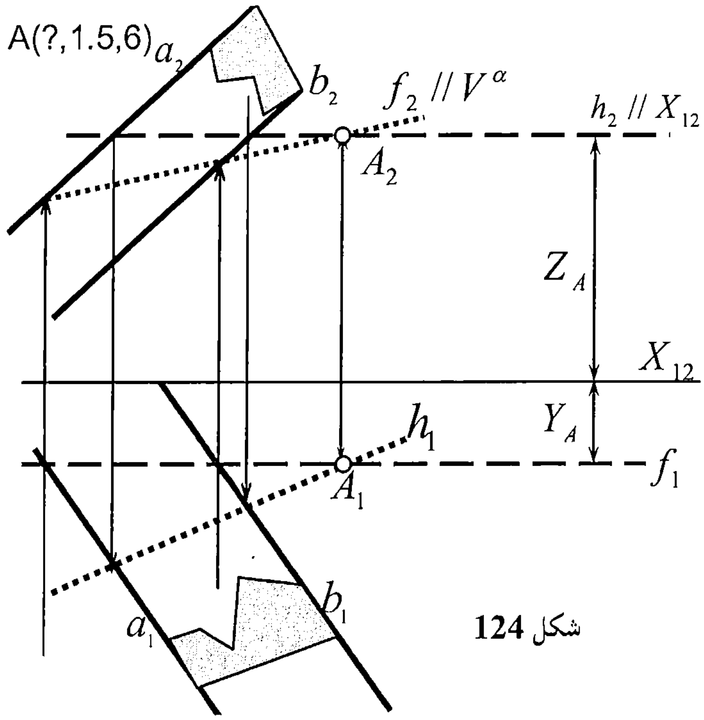
فى الحالة (a) نتيجة لأن البعد Y لنقطة A هو المجهول فإننا إعتماد على البعد Z المعلوم للنقطة نمرر مسقط رأسى لمستقيم أفقى موازى لخط الأرض $h_2//X_{12}$ إعتماد على البعد Z المعلوم للنقطة (موازى لخط الأرض) فنولد مسقطه الأفقى وبالتالى نوجد المسقط الأفقى للنقطه شكل 123.

فى إلحالة (b) نتيجة لان البعد Z لنقطة B هو المجهول فإننا إعتماد على البعد Y المعلوم للنقطة نمرر مسقط أفقى لمستقيم وجهى $f_1//X_{12}$ إعتماد على البعد Y المعلوم للنقطة (موازى لخط الأرض) فنولد مسقطه الرأسى وبالتالى نوجد المسقط الرأسى للنقطه شكل 123.



شكل 123

مثال: مثل النقطة A(?,1.5,6)



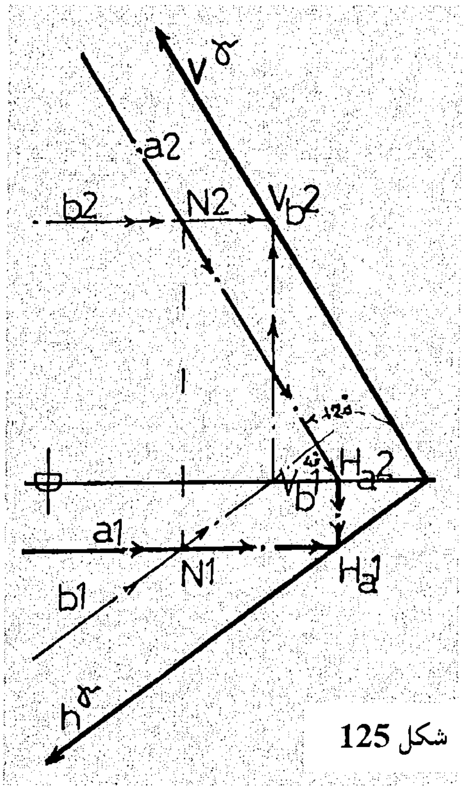
شكل **124**

فى المثال الموضح نجـد أن نقطـة **A** مجهولة **X** وبالتالى نعتمد على البعـد Y_A لتمرير مسقط أفقـى لمسـتقيم وجهـى مـوازى لخـط الأرض f_1 وبإستخدام نظرية توليد المستقيمات نوجد المسقط الرأسـى للمسـتقيم الوجهى f_2، ثم نعتمد علـى البعـد Z_A لتمرير مسقط رأسى لمسـتقيم أفقى h_2 موازى لخط الأرض وبإستخدام نظرية توليد المستقيمات نوجد المسقط لأفقى للمستقيم الأفقى h_1. تقـاطع المساقط الافقيه للمستقيمين الأفقى والوجهى تعطى المسقط الأفقى للنقطة A_1، تقاطع المساقط الرأسـية للمسـتقيمين الأفقى والوجهى تعطى المسقط الرأسي للنقطة A_2، وهذا أيضا يتم عندما يكون المستوى ممثل بالأثـار ولكـن دون إستخدام نظرية توليد المستقيمات وإنما بإستخدام نظرية "سكة العميان" مباشرة أعتماد على الابعاد وبالتالى تنتج المساقط شكل **124**. وسنعطى عدة امثله على ذلك.

مثال: عين أثرى المستوى المكون من المستقيمين a,b المتقاطعين فى N

أولا : **N(2,1,4)** والمستقيم **b** أفقى يميل 45^0 على المستوى الرأسى، **a** وجهى يميل 120^0 على المستوى الأفقى

من الحالة المعطاه نجد أن المستقيم الأفقى الواقع ف المستوى يحدد خاصيتين: الأولى أثر المستقيم الأفقى هو أثر رأسى يقع على الأثر الرأسى للمستوى وبالتالى هى نقطة يمكن منها رسم الأثر الرأسى للمستوى ولكن ليس لدينا إتجاهه، الثانيـة هى إتجاه المسقط الأفقى للمستقيم الأفقى h_1 هو إتجاه الأثر الأفقى للمستوى وبالتالى يبقى لنا نقطة نرسم منها إتجاه هذا الأثر شكل **125**.



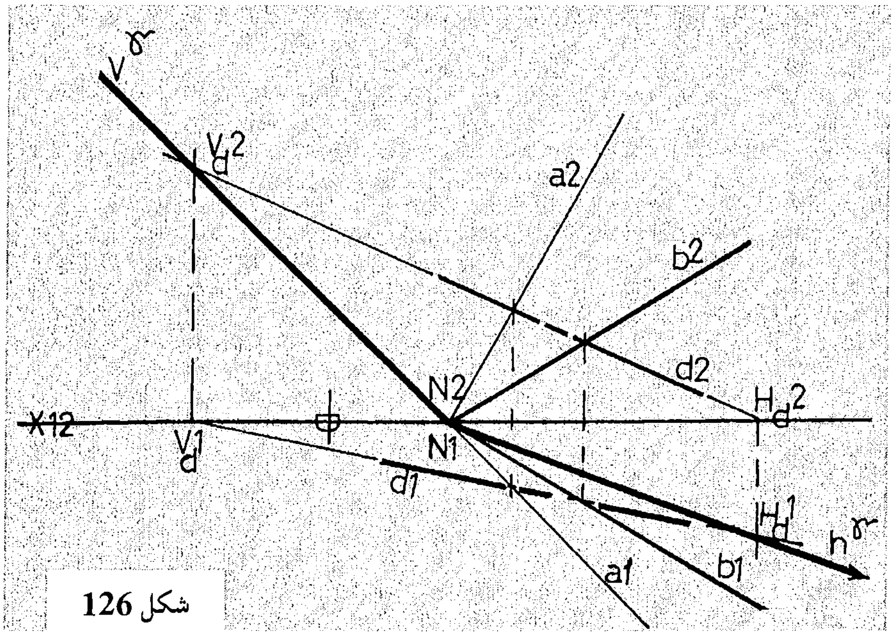
شكل 125

وكذلك المستقيم الوجهى الواقـع فى المسـتوى يحـدد خاصيتين: الأولى أثر المستقيم الرأسى هو أثر أفقى يقع على الأثر الأفقى للمستوى وبالتالى هى نقطة يمكن منها رسـم الأثر الأفقى للمستوى وأصبح معروف إتجاهه من المستقيم الأفقى وبالتالى يتم رسمه مباشرة، الثانية هى إتجاه المسـقط الرأسى للمستقيم الوجهى f_2 هو إتجـاه الأثـر الرأسـى للمستوى وبالتالى إتجاه الأثر الرأسى يتم رسمه من الأثـر الرأسى للمستقيم الأفقى.

ثانيـا: N(2,0,0) ، a_2,a_1,b_2,b_1 تصـنع الزوايـا 150^0 و 30^0 و 135^0 و 60^0 مع خط الأرض

الحل: نلاحظ أن المستوى مكون من مستقيمين ولكن لهم وضع خاص فى أستنتاج أثارهم وهى أنها كلها تقع على خط الأرض وبالتالى لايمكن تحديد أثار مباشره لهذة المستقيمات وكل ماتم الحصول عليه هو نقطة على خط الأرض هى رأس المستوى لأنها المحل لكل الأثار الأفقية والرأسية شـكل **126**.

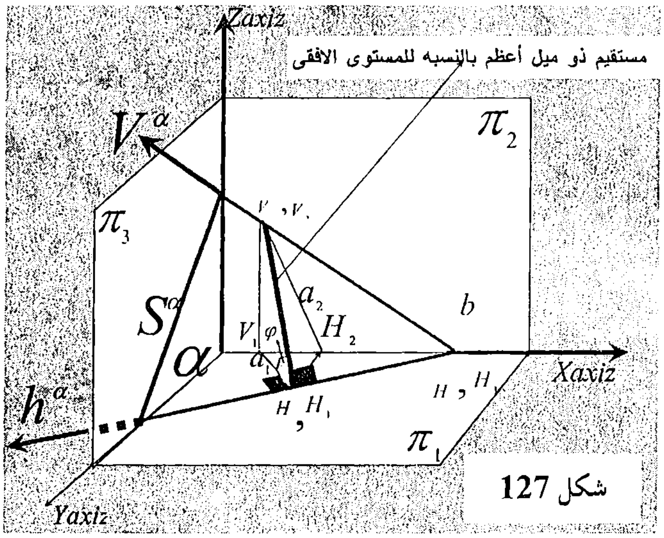
لذلك بناء علـى وضـع المسـتوى الممثل بمسـتقيمين وكذلك نظريـة



شكل 126

التوليد يتم إيجاد أى مستقيم فى المستوى بأى وضع حيث نمرر أى مسقط رأسى لمستقيم **d** بأى وضع كما بالشكل ثم يتم إستنتاج مسقطه الأفقى ويمكن إذا إيجاد أثار المستقيم الجديد **d** وهذه الأثار تقع على أثار المستوى يتم توصيلهم بالنقطة على خط الأرض فنستنتج أثار المستوى، شكل **126**.

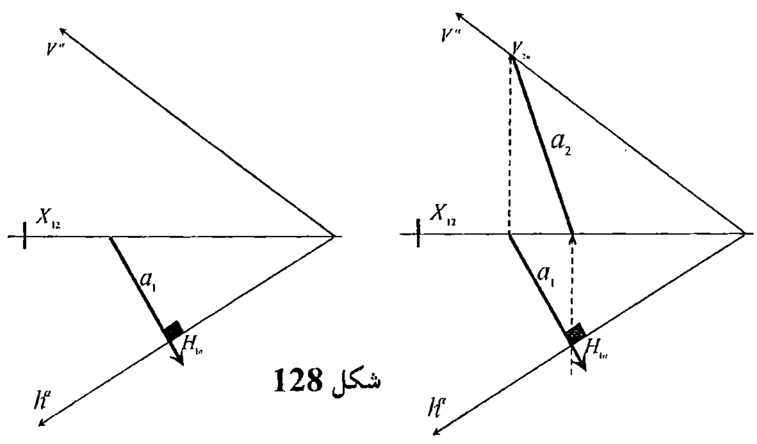
المستقيم ذو الميل الأعظم



شكل **127**

ذهبيه **4**: المستقيم ذو الميل الأعظم بالنسبة للمستوى الأفقى π_1. المستقيم ذو الميل الأعظم بالنسبة للمستوى الأفقى هو المستقيم الواقع فى المستوى وله أكبر زاويه ميل φ على المستوى الأفقى عن باقى المستقيمات الواقعة فى المستوى، وزاوية الميل هذه هى نفس زاوية ميل المستوى على المستوى الأفقى φ شكل **127**.

مميزات هذا المستقيم أنه عمودى على الأثر الأفقى للمستوى وبالتالى فهو عمودى على كل المستقيمات الأفقيه فى المستوى. يظهر ذلك فى الإسقاط بإستخدام نتيجة الزاويه القائمه تظهر قائمة إذا كان أحد أضلاعها طول حقيقى، ونتيجة لأن الأثر الأفقى للمستوى طول حقيقى فإنه يمكن رسم عمودى عليه مباشرة كما يظهر فى الشكل الموضح شكل **128**. ولإستنتاج مستقيم ذو ميل أعظم فى المستوى يتم رسم مسقط أفقى للمستقيم فى وضع عمودى على الأثر الأفقى ثم إستنتاج مسقطه الرأسى بإسقاط الأثار. ولإيجاد زاوية الميل

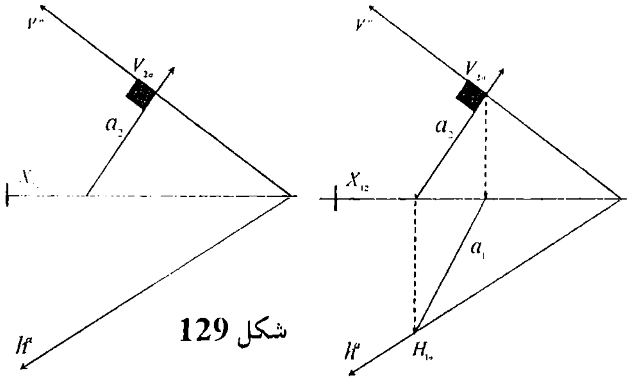


شكل **128**

للمستوى أو للمستقيم على المستوى الأفقى يتم إستخدام أسلوب إيجاد الطول الحقيقى على المسقط الأفقى للحصــول على الطول الحقيقى للمستقيم وكذلك زاوية الميل φ .

ذهبيه 5: المستقيم ذو الميل الأعظم بالنسبة للمستوى الرأسى π_2

المستقيم ذو الميل الاعظم بالنسبة للمستوى الرأسى هو المستقيم الواقع فى المستوى وله أكبر زاويه ميل φ على المستوى الرأسى عن باقى المستقيمات الواقعة فى المستوى، وزاوية الميل هذه هى نفس زاوية ميل المستوى على المستوى الرأسى φ . مميزات هذا المستقيم أنه عمودى على الأثر الرأسى للمستوى وبالتالى فهو عمودى على كل المستقيمات الوجهية فى المستوى. يظهر ذلك فى الإسقاط بإستخدام نتيجة الزاويه القائمة تظهر قائمة إذا كان أحد أضلاعها طول حقيقى، ونتيجة لأن الأثر الرأسى للمستوى طول حقيقى فإنه يمكن رسم عمودى عليه مباشرة كما يظهر فى شكل129. ولإستنتاج مستقيم ذو ميل أعظم فى المستوى يتم رسم مسقط رأسى للمستقيم فى وضع عمودى على الأثر الرأسى ثم إستنتاج مسقطه الأفقى بإسقاط الأثار. ولإيجاد زاويه الميل للمستوى أو للمستقيم على المستوى الرأسى يتم إستخدام أسلوب إيجــاد الطــول الحقيقى على المسقط الرأسى للحصول على الطول الحقيقى للمستقيم وكذلك زاوية الميل φ .



شكل 129

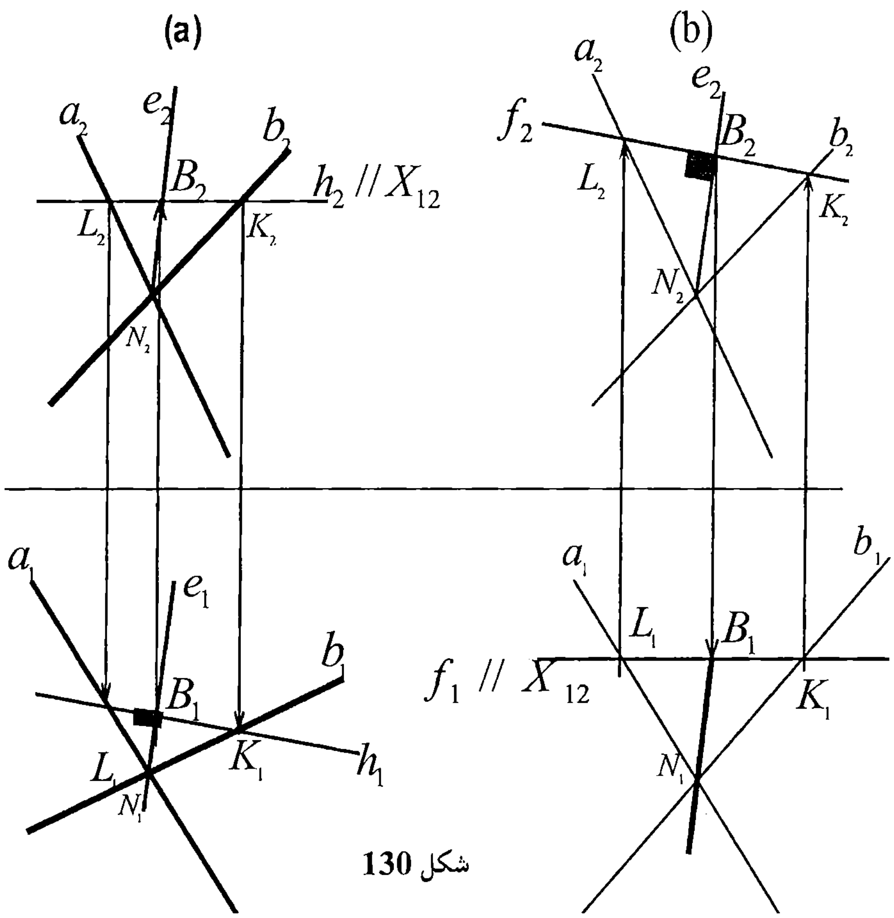
ملاحظة: *كل نقطة فى المستوى لايمر بها سوى مستقيم واحد ذو ميل أعظم بالنسبة للمستوى الأفقى وكذلك مســتقيم واحد ذو ميل أعظم بالنسبة للمستوى الرأسى*

- تمثيل مستقيم ذو ميل أعظم فى مستوى ممثل بمستقيمين

المستقيم ذو الميل الأعظم بالنسبه للمستوى الأفقى هو المستقيم الواقع فى المستوى ومن مميزات هذا المستقيم أنه عمودى على الأثر الأفقى للمستوى وبالتالى فهو عمودى على كل المستقيمات الأفقيه فى المستوى. لذا لرسم مستقيم ذو الميل اعظم بالنسبه للمستوى الأفقى يتم رسمه فى هذه الحالة على أى مسقط أفقى لمستقيم أفقى فى المستوى، لــذلك يــتم إستنتاج أى مستقيم أفقى **h** بإستخدام نظرية التوليد ثم رسم المسقط الأفقى للمستقيم ذو الميل الاعظم e_1 مــن أى

نقطة فى المستوى ولتكن N_1 عمودى علي المسقط الأفقى للمستقيم الأفقى h_1 . وبإستخدام نظرية التوليد مرة أخرى يتم إستنتاج المسقط الرأسى للمستقيم ذو الميل الاعظم بإسقاط نقطة التقاطع **B**. كما بالشكل **(a) -130**

المستقيم ذو الميل الاعظم بالنسبه للمستوى الرأسى هو المستقيم الواقع فى المستوى مميزات هذا المستقيم أنه عمــودى على الأثر الرأسى للمستوى وبالتالى فهو عمودى على كل المستقيمات الوجهية فى المستوى. لذا لرسم مستقيم ذو الميل اعظم بالنسبه للمستوى الرأسى يتم رسمه فى هذه الحالة عمودى على أى مسقط رأسى لمستقيم وجهى فى المســـتوى، لذلك يتم إستنتاج أى مستقيم وجهى **f** بإستخدام نظرية التوليد ثم رسم المسقط الرأسى للمستقيم ذو الميل الاعظم e_2 من أى نقطة فى المستوى ولتكن N_2 عمودى علي المسقط الرأسى للمستقيم الوجهى f_2 . وبإستخدام نظرية التوليد مرة أخرى يتم إستنتاج المسقط الأفقى للمستقيم ذو الميل الاعظم بإسقاط نقطة التقاطع **B**. كما بالشكل **130-(b)**



شكل **130**

تمرير مستوى بالمستقيم

المعلوم المستقيم [m[A(9,1,4), B(5,3,1 والمطلوب تعين الأثرين الأفقى والرأسى لمستوى α يقع فيه المستقيم m بحيث يكون: أولا: α_1 موازى لخط الأرض، ثانيا: α_2 قاطع خط الأرض عند X=1، ثالثا: α_3 عمودى على π_1، رابعا: α_4 عمودى على π_2

الحل: نوجد الأثر االأفقى والأثر الرأسى للمستقيم ثم نبدأ التحليل للمطلوب وبناء عليه نحدد وضع المستوى الذى يحتوى المستقيم. شكل **131**

أولا: α_1 موازى لخط الأرض: المستوى الموازى لخط الأرض أثاره الأفقية والرأسية توازى خط الأرض وبذلك فقد عرفنا إتجاه الأثار للمستوى ويبقى مكان إنطلاقها، ويتحدد من علاقة المستقيم الواقع فى المستوى حيث أن الأثار للمستقيم تقع علىالأثار للمستوى كل فى مسقطه، وبذلك نرسم من الأثر الرأسى للمستقيم خط يوازى خط الأرض ويكون هو الأثرالرأسى للمستوى $V^{\alpha1}$، وكذلك من الأثر الأفقى للمستقيم نر سم خط يوازى خط الأرض ويكون هو الأثر الأفقى للمستوى $h^{\alpha1}$. شكل **131**

ثانيا: α_2 قاطع خط الأرض عند X=1

من تحديد مكان **X** فهى رأس المستوى وبالتالى نصلها بالأثر الرأسى للمستقيم فتكون هى الأثر الرأسى للمستوى $V^{\alpha2}$، نصلها بالأثر الأفقى للمستقيم فتكون هى الأثر الأفقى للمستوى $h^{\alpha2}$. شكل **131**

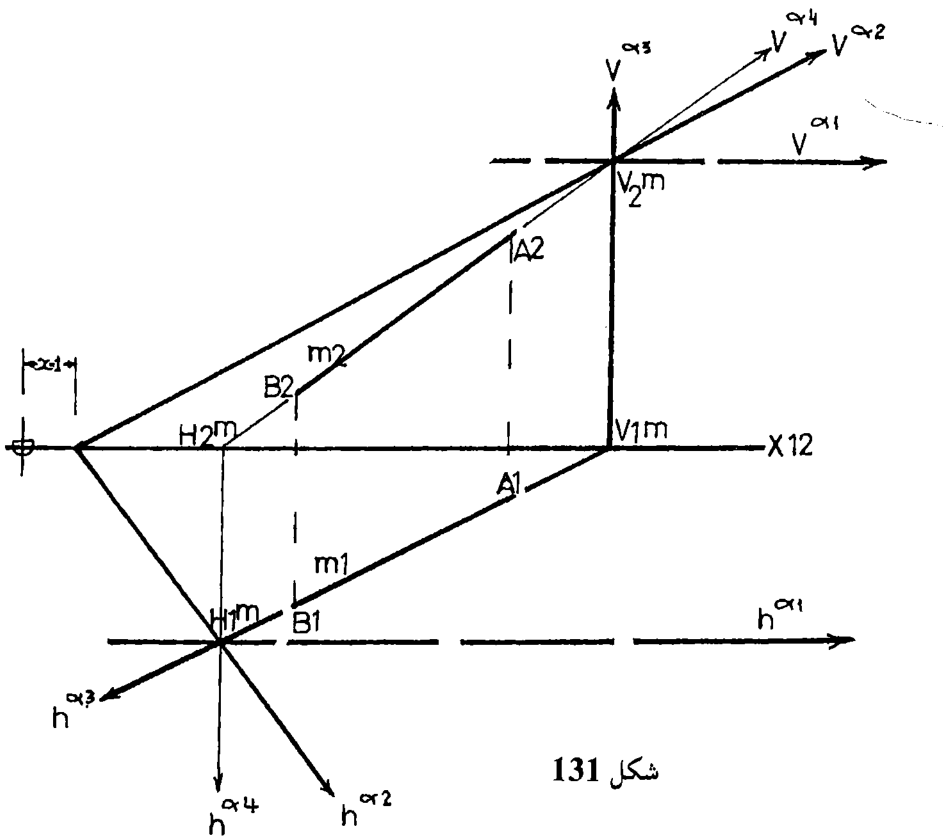
ثالثا: α_3 عمودى على π_1 :

من مميزات المستوى العمودى على المستوى الأفقى أنه خطى المسقط الأفقى أى أن المسقط الأفقى لأى شكل يقع فى هذا المستوى يكون على هذا الخط، وبالتالى من معرفه m_1 يكون تحدد $h^{\alpha3}$ وهو منطبق عليه ، نمد m_1 حتى يصل لخط الأرض ومنه نرسم $V^{\alpha3}$ عمودى على خط الأرض. شكل **131**

رابعا: α_4 عمودى على π_2 :

من مميزات المستوى العمودى على المستوى الرأسى أنه خطى المسقط الرأسى أى أن المسقط الرأسى لأى شكل يقع فى هذا المستوى يكون على هذا الخط، وبالتالى من معرفه m_2 يكون تحدد $V^{\alpha4}$ وهو منطبق عليه ، نمد m_2 حتى يصل لخط

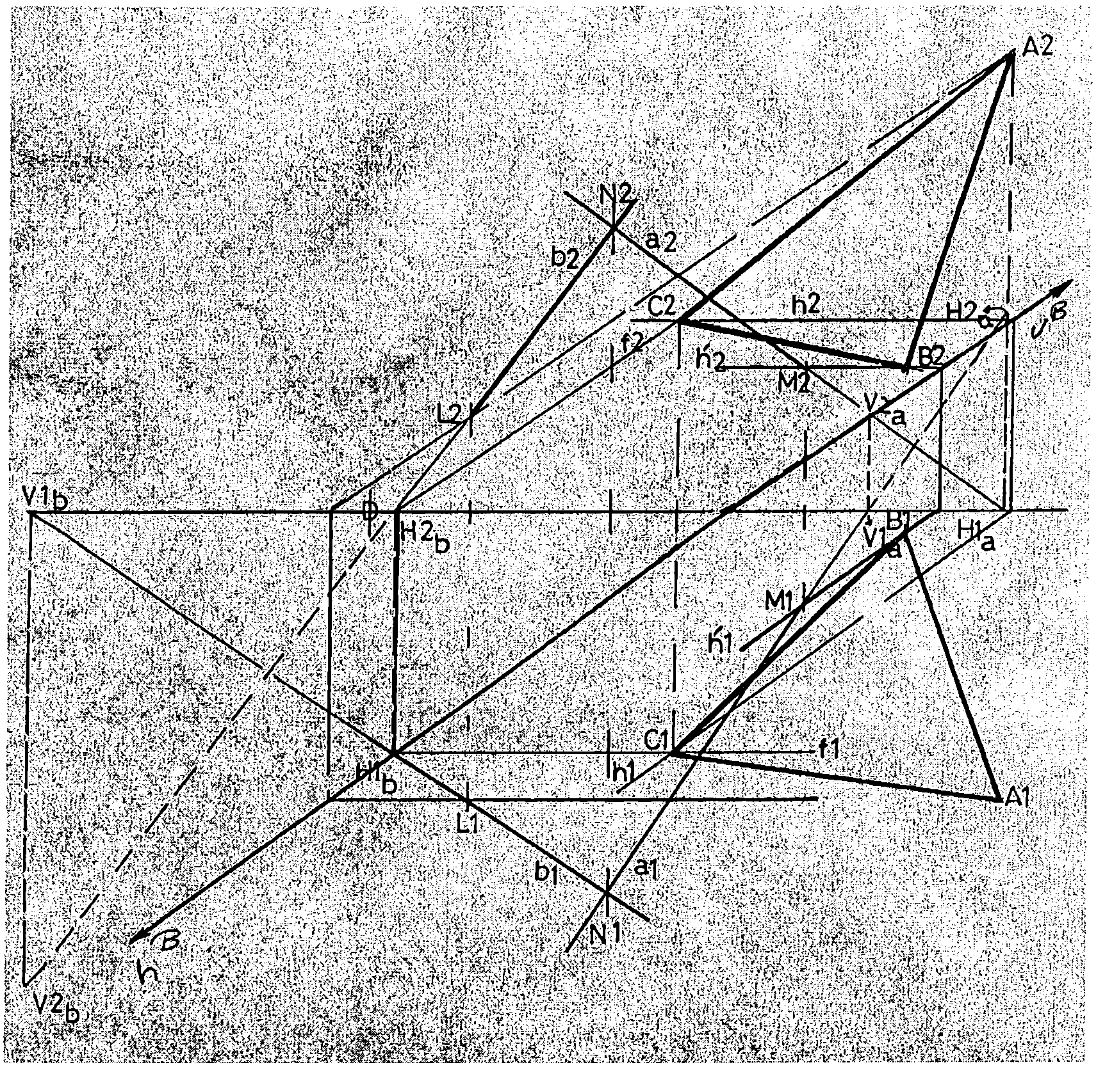
الأرض ومنه نرسم $h^{\alpha 4}$ عمودى على خط الأرض. شكل **131**



شكل **131**

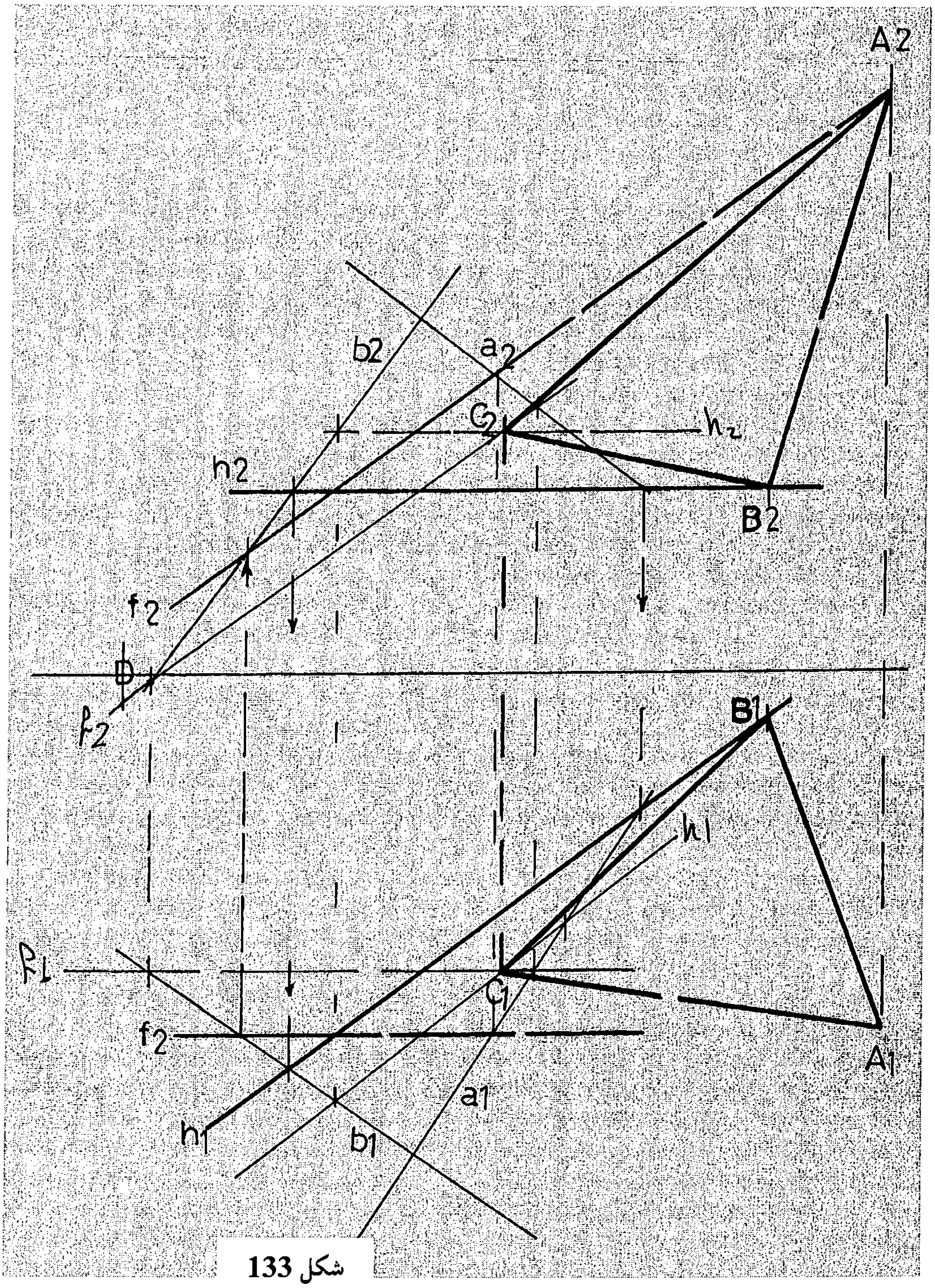
مثال: المعلوم المستوى β المكون من المستقيمين المتقاطعين فى نقطة N(5,8,6) والاول يمر بنقطة M(9,2,3) والثانى يمر بنقطة L(2,6,2) والمطلوب تمثيل المثلث ABC الذى يقع فى هذا المستوى حيث A(13,6,Z), B(11,Y,3), C(X,5,4)

الحل الاول: بإيجاد أثار المستوى شكل **132**



شكل 132

الحل الثانى بدون إستخدام الأثار: شكل 133



شكل 133

نلاحظ أن الحل الأول بإستخدام الأسلوب التقليدى فى إيجاد الأثار للمستوى أولا قد أضاع الكثير من الوقت وجعل شكل الحل معقدا وذلك عن الحل بإستخدام التمرير المباشر للمستقيمات الأفقية والوجهية وكذلك نظرية توليد المستقيمات. وفى كلتا الحالتين يتم تمرير وإستخدام المستقيمات الافقيه والوجهيه لإيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط

أوضاع المستويات فى الفراغ والإسقاط من منظور الرسم الهندسى

كما تم الحدث سابقا فى الفرق فى الإسقاط بين الرسم الهندسى والهندسة الوصفية، فإننا نتحدث الأن نتحدث عن إسقاط المستويات بأوضاعها الخاصة والعامة من منظور الرسم الهندسى.

شكل **134** و **135** -**(A)** يبين الوضع الفراغى للمستوي الأفقى سواء كان مثلث أو مستطيل، **(B)** يبين الإسقاط بالنسبة للمستوي الأفقى على المستويات الثلاثة ودورانهما **(C)** يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستوي الأفقى.

شكل **136** و **137** -**(A)** يبين الوضع الفراغى للمستوي الوجهى سواء كان مثلث أو مستطيل، **(B)** يبين الإسقاط بالنسبة للمستوي الوجهى على المستويات الثلاثة ودورانهما **(C)** يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستوي الوجهى.

شكل **138** و **139** -**(A)** يبين الوضع الفراغى للمستوي الجانبى سواء كان مثلث أو مستطيل، **(B)** يبين الإسقاط بالنسبة للمستوي الجانبى على المستويات الثلاثة ودورانهما **(C)** يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصفية للمستوي الجانبى.

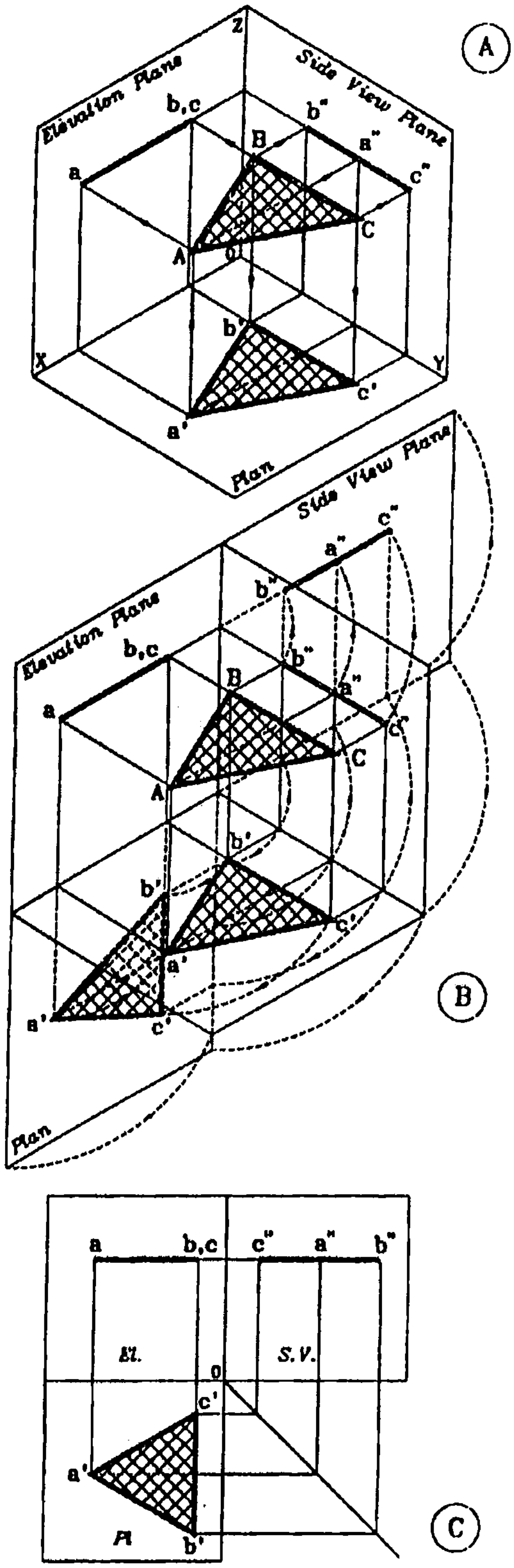
شكل **140** و **141** -**(A)** يبين الوضع الفراغى للمستوي الرأسى سواء كان مثلث أو مستطيل، **(B)** يبين الإسقاط بالنسبة للمستوي الرأسى على المستويات الثلاثة ودورانهما **(C)** يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن

المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجانبى فى الهندسة الوصــفية للمســتوي الرأسى.

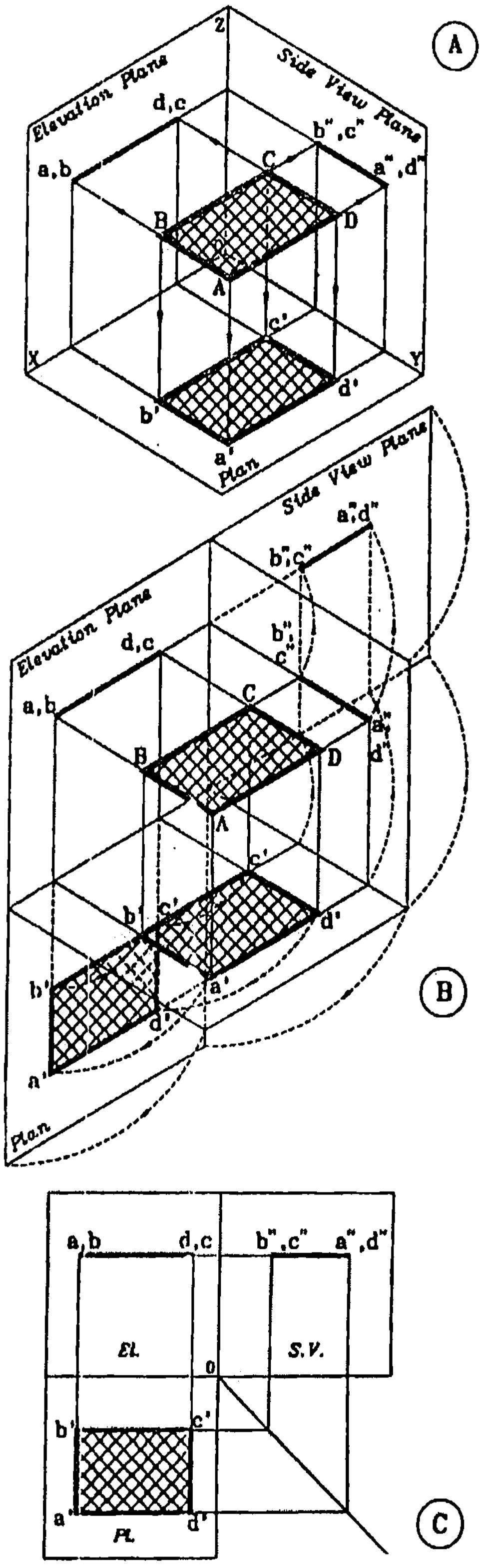
شكل **142** و **143** -**(A)** يبين الوضع الفراغى للمستوي العمودى على الجانبى سواء كان مثلث أو مستطيل، **(B)** يبين الإسقاط بالنسبة للمستوي العمودى على الجانبى على المستويات الثلاثة ودورانهما **(C)** يوضح الثلاثة مساقط بعد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجــانبى فى الهندسة الوصفية للمستوي العمودى على الجانبى.

شكل **144** -**(A)** يبين الوضع الفراغى للمستوي العمودى على الرأسى سواء كان مثلث أو مستطيل، **(B)** يــبين الإسقاط بالنسبة للمستوي العمودى على الرأسى على المستويات الثلاثة ودورانهما **(C)** يوضح الثلاثة مساقط بعــد إفراد المستويات ونلاحظ أن المسقط الجانبى على اليمين فى الرسم الهندسى بهذا الأسلوب هو نفس المسقط الجــانبى فى الهندسة الوصفية للمستوي العمودى على الرأسى.

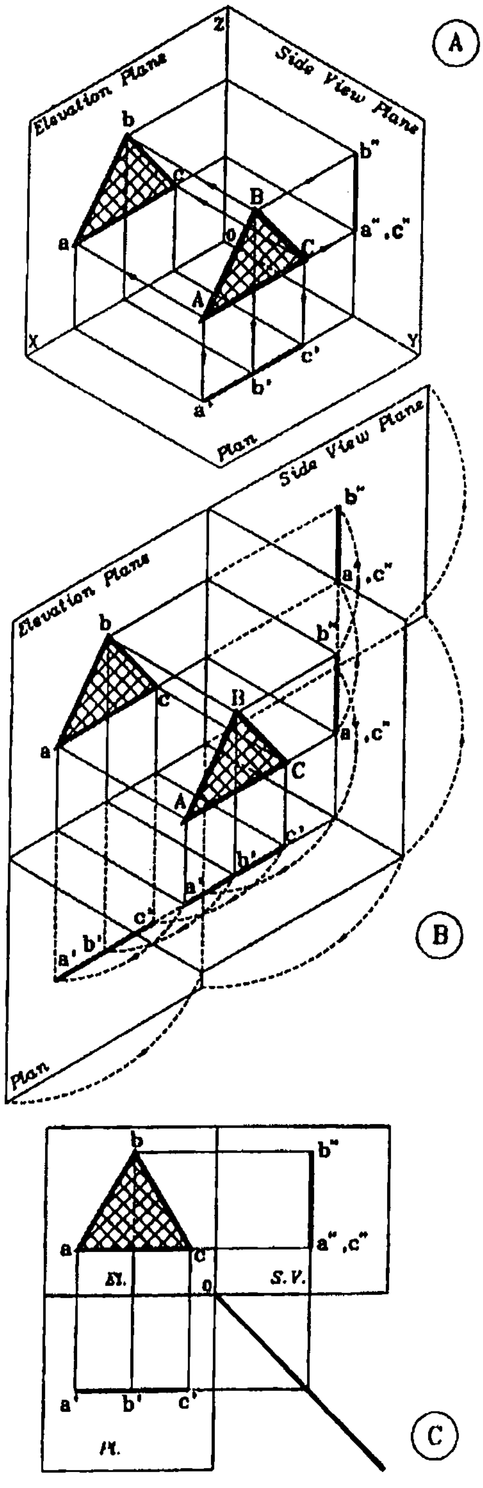
شكل **145**-يبين الوضع الفراغى للمستوي العام.



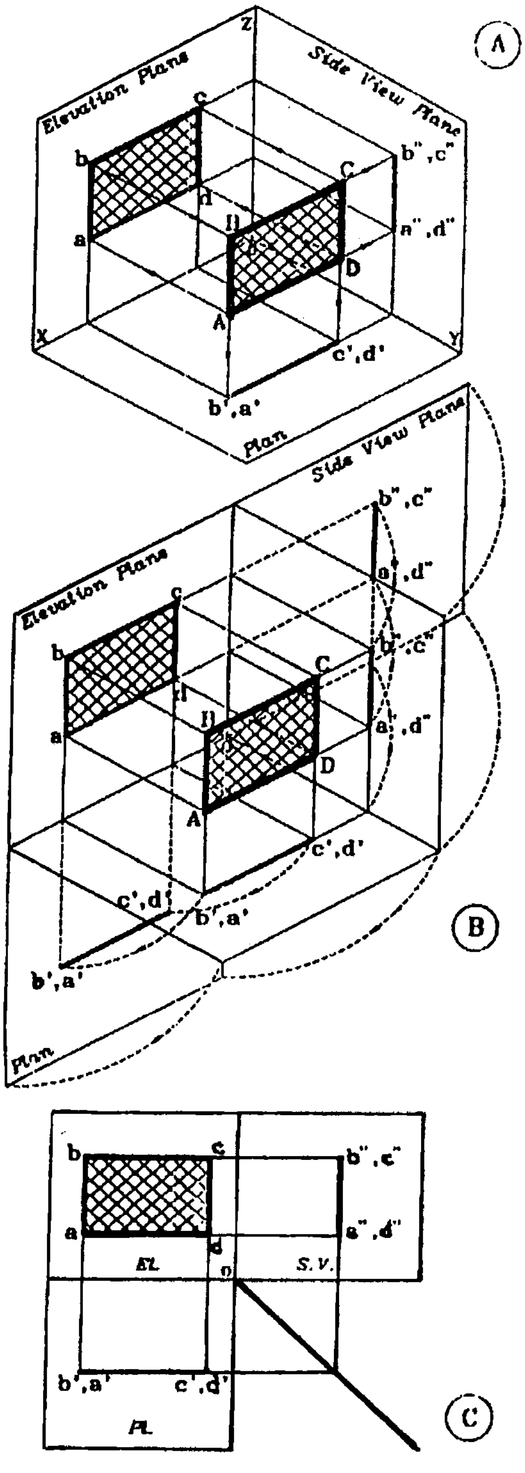
شكل134



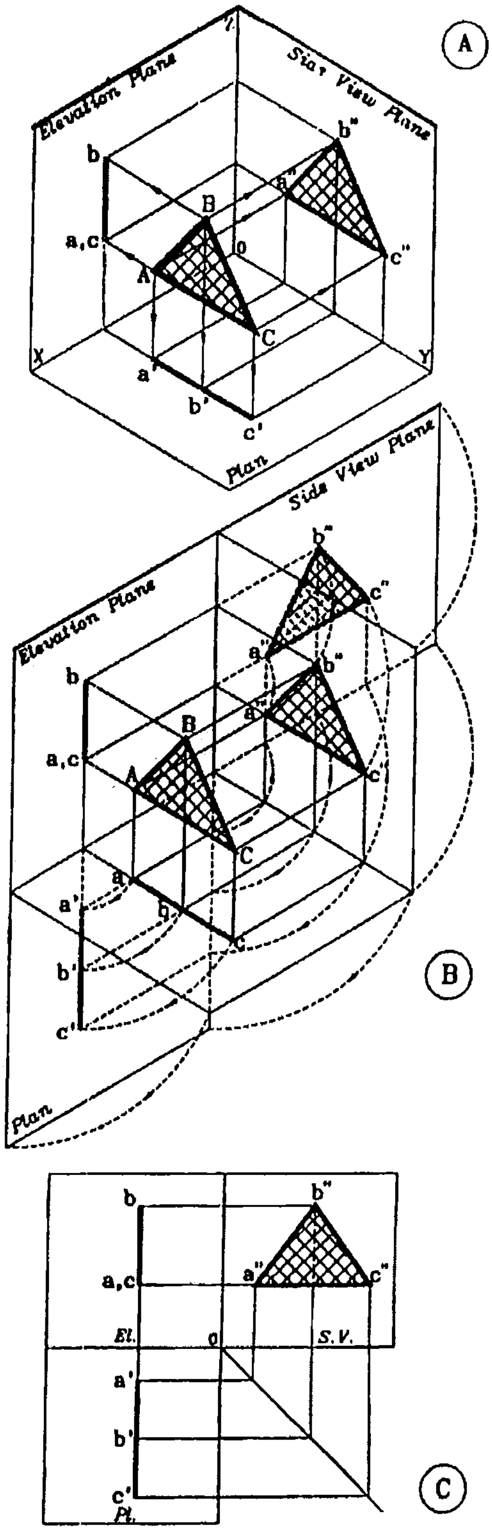
شكل135



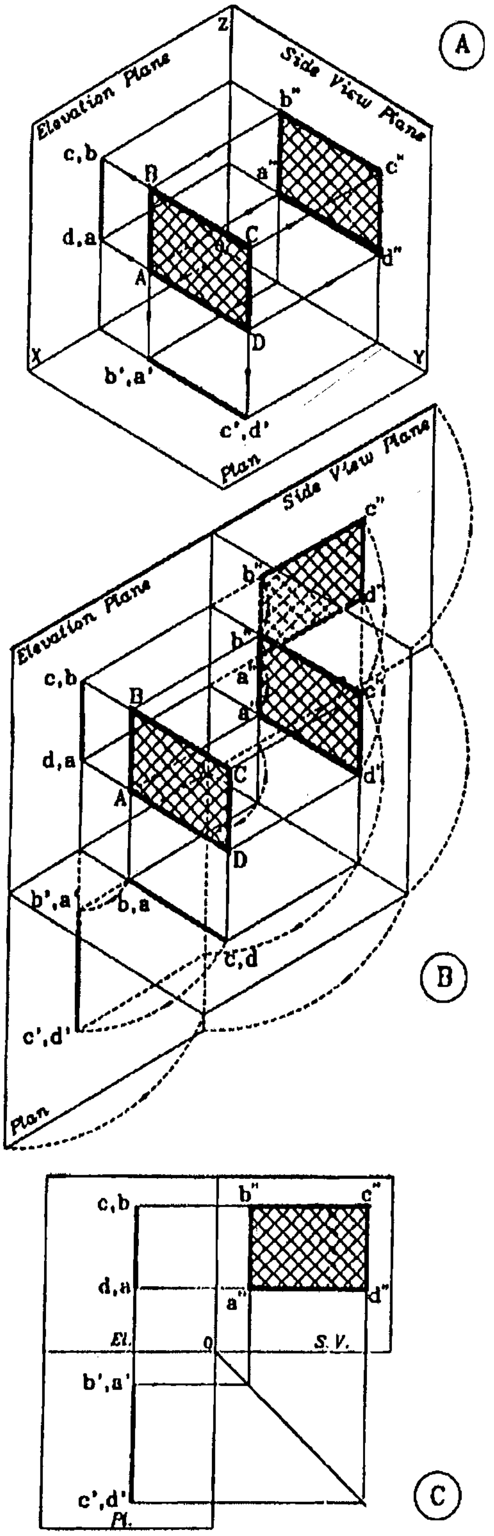
شكل 136



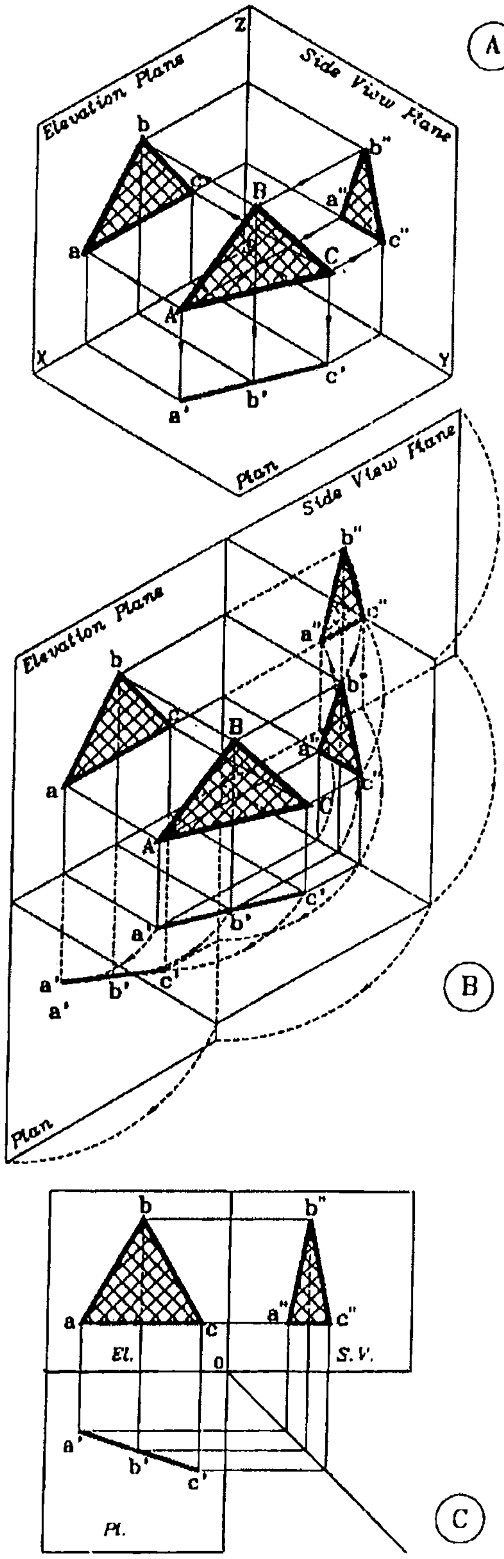
شكل137



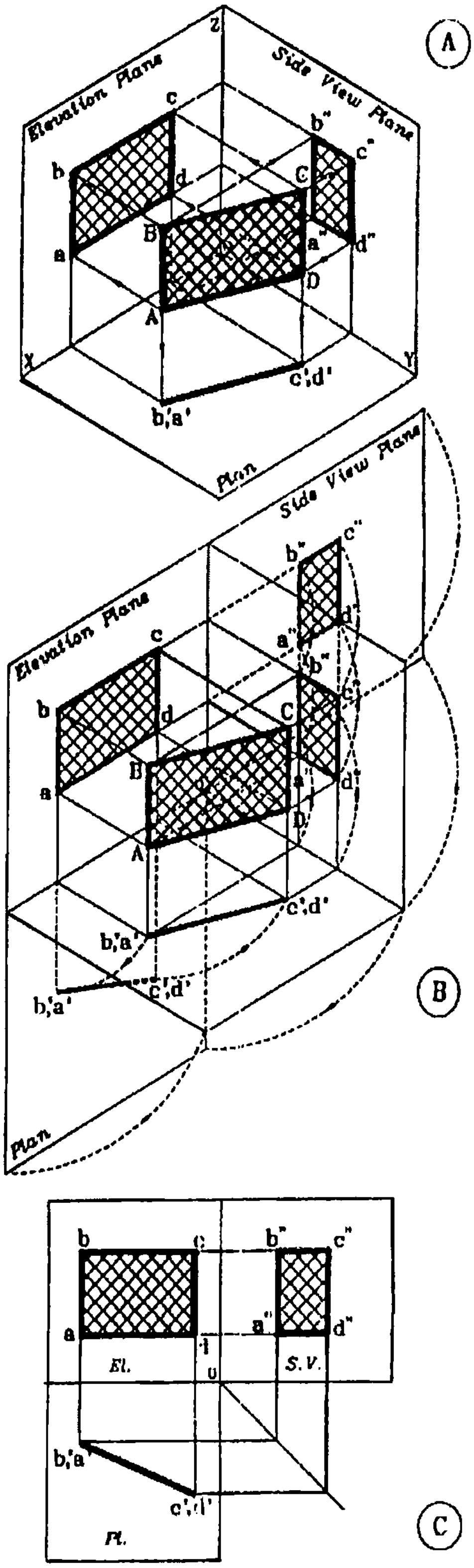
شكل138



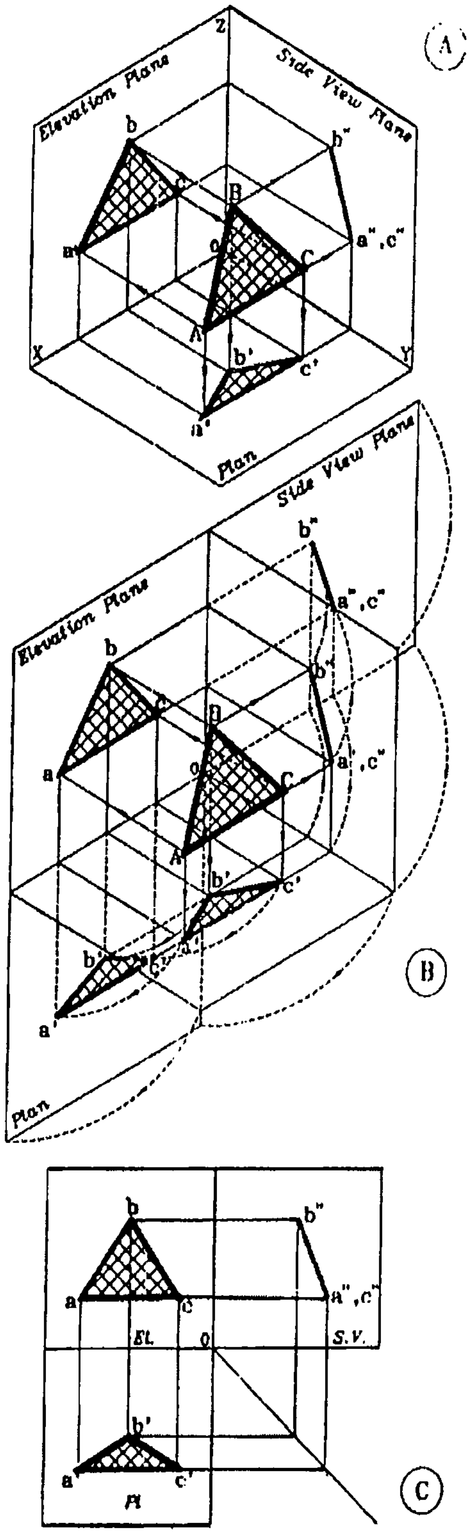
شكل139



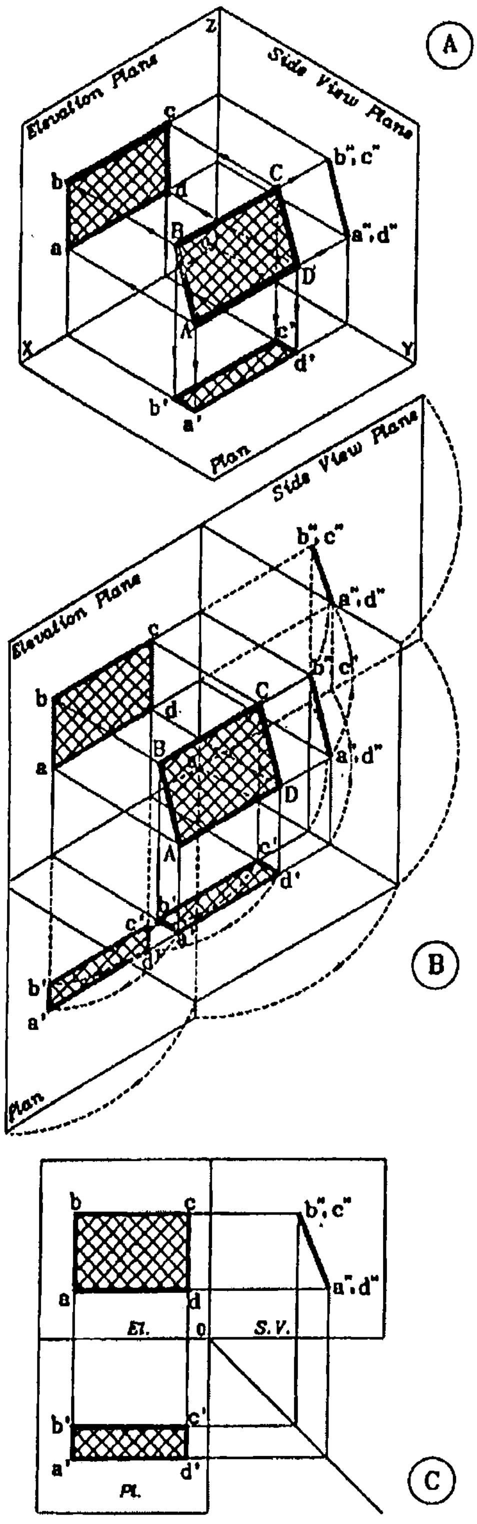
شكل140



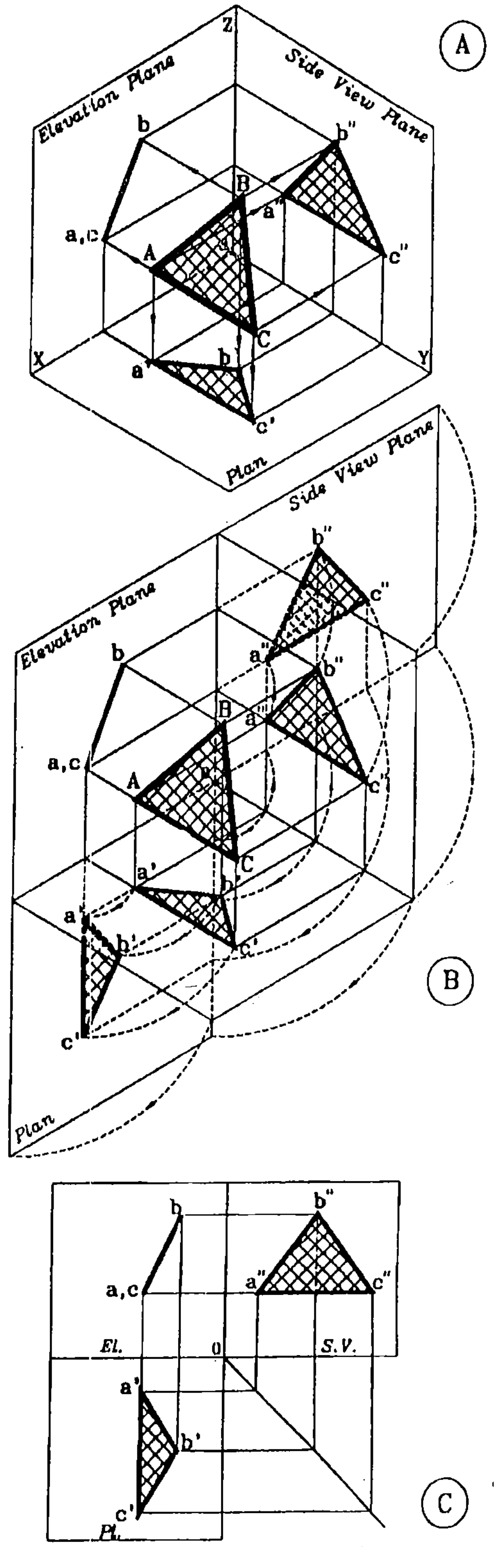
شكل141



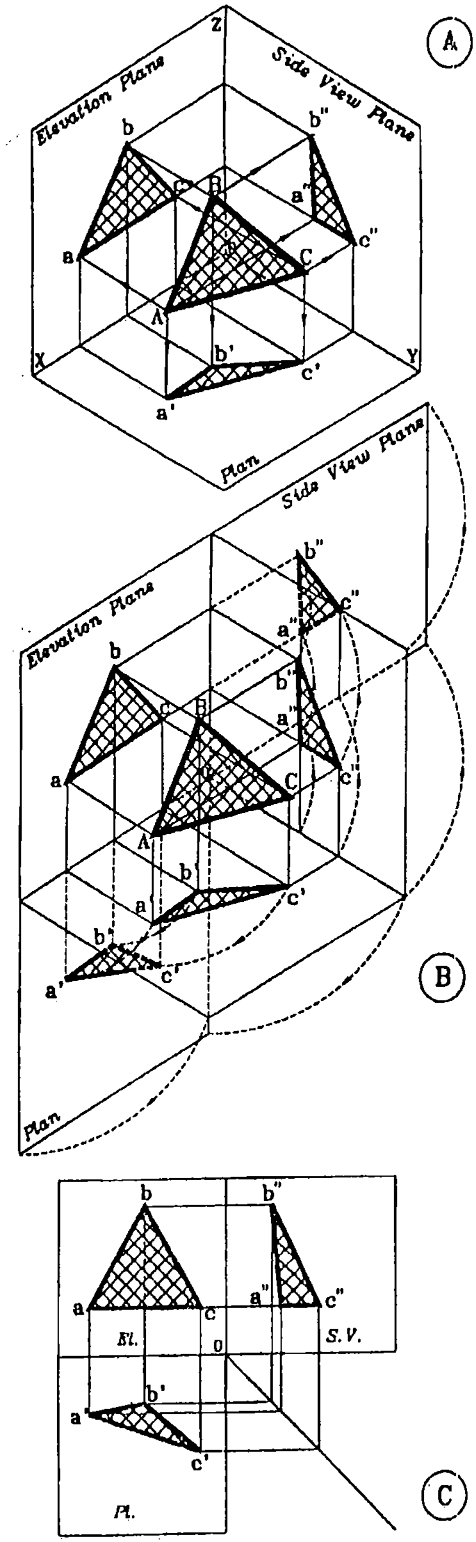
شكل142



شكل143



شكل144



شكل145

تمارين المستوى

1- عين أثار المستويات الاتية

β $(2,90^0,90^0)$ و $0(2,\infty,3)$ و Ψ $(2,\infty,\infty)$ و $\Phi(-1,4,5)$

$\Pi(-1,-3,-4)$ و $\xi(0,135^0,120^0)$ و $\lambda(0,45^0,30^0)$

2- عين أثار المستوى الذي يحتوي على النقط الثلاث الاتية :

1- $A(-3,2,4)$ $B(3,7,2)$ $C(1,1,6)$ ، 2- $A(-3,1,6)$ $B(1,7,-1)$ $C(2,2,2)$

3- $A(2,0,3)$ $B(0,-2,0)$ $C(-2,4,0)$ ، 4- $\alpha[A(1,1.5,2.5),B(2,2,1.5),C(0,4,1.5)]$

5- $\beta[D(2,0,3),E(0,-2,0),F(-2,4,0)]$

3- معطى نقطتين $A(6,3,3)$ $B(3,1,2)$ والمطلوب مربع وجهي **ABCD** .

4- مثل بالأثرين المستوى الرأسي (خطي المسقط الأفقي) الذي :

أولا : يمر بالنقطتين $A(6,3,3)$ ، $B(3,1,2)$ ثم عين مسقطي نقطة **M** تقع في هذا المستوى وتبعد 4 سم عن π_1 و2 سم عن π_2 .

ثانيا : الذي يمر بنقطة $C(4,1,3)$ ويميل 30^0 على π_2 ثم عين N_1 لنقطة **N** تقع في هذا المستوى حيث $(1,2)$ N_2 .

5- مثل نقطتين $A(1,?,3)$ و $B(7,3,?)$ تقعان في المستوى $\alpha(5,150^5,120^0)$.

6- المعلوم من مستوى أثره الأفقي **h** ونقطة**N** فيه عين أثره الرأسي إذا كان:

أولا : $N(6,2,5)$, $h(1,135^0)$ ثانيا : $N(1,2,-5)$, $h(7,30^0)$

7- المعلوم مستوى $\beta(\infty,4,3)$ والمطلوب تمثيل المثلث **ABC** والواقع في المستوى إذا كانت $A(2,?,2)$ $B(4,0,?)$, $C(?,3,?)$.

8- المعلوم نقطة **N** ومستقيم **m** والمطلوب تمثيل المستقيم **n** المار بالنقطة **N** ويوازي **m** ثم عين أثري المستوى المكون منهما إذا فرض ان:

أولا : $N(2,3,1)$, **m** أفقي يمر بالنقطة $A(1,2,2)$ ويميل 30^0 على π_2 .

ثانيا : $N(5,4,3)$, **m** وجهي و يمر بالنقطة $B(3,2,2)$ ويميل 45^0 على π_1 .

9- مثل متوازي الاضلاع **ABCD** الواقع في المستوى β $(-3,-3,2)$ حيث $A(3,1,?)$ $B(?,2,1.5)$ $C(3,?,3)$

10- مثل متوازي الاضلاع **ABCD** الواقع في المستوى β $(-3,-3,3)$ حيث $A(3,1,?)$ $B(?,2,1.5)$ $C(3,?,3)$

11- مثل المستوى الأفقي α الذي يمر بالنقطة $P(4,4,2)$ ثم مثل المربع **ABCD** الذي يقع في المستوى α ومركزه **P** إذا كان طول ضلعه 4 سم والقطر **CA** يميل على π_2 ب 60^0 .

12- مثل المستوى الجانبي α الذي يمر بالنقطة A (5,2,5) ثم مثل المثلث ABC الذي يقع في المستوى α إذا كان ضلعه BA رأسي و طوله = 3 سم والضلع CA عمودي على π_2 وطوله 4 سم .

13- عين مساقط المثلث ABC المتساوي الساقين فيه AC= AB والواقع في المستوى λ(7,7,?) حيث
A (?,?,2), B(1,1, 5), C (-2,?,?)

14- عين مساقط المثلث ABC والواقع في المستوى λ(5,6, ∞) حيث ان A (0,?,5) B(?,?,2) والضلع AB طوله 5 سم والضلع AC أفقي وطوله 6 سم ، اذكر عدد الحلول.

15- عين مساقط الشكل الرباعي ABCD والذي يقع في مستوى يوازي خط الأرض X12 حيث A (3,3,1) B(1.5,1, 3) C (5,?,3) D (6,2,?) .

16- عين مساقط الشكل السداسي ABCDEF حيث A (1,3,2) B (2.5,5,4)
E (6,1,1.5) F (?,1.5,1) C(5,?,5) D (7,2.5 ?)

17- مثل المعين الواقع في المستوى α (4,5, ∞) حيث A(0,?,2) و B(1,?,1) و C(2,?,?) أذكر عدد الحلول.

18- مثل المثلث الرأسى الذى فيه A (8,1,2), B (2,7,4) ,C (?,5,6)

19- مثل المثلث ABC العمودى على المستوى الجانبى الذى فيـــه A(1,2,3) و B(4,3.5,?) و C(5,1,?) وان مستوى المثلث يميل 30 درجه على المستوى الأفقى واستنتج أثار المستوى

20- مثل المستطيل ABCD الواقع فى المستوى الأفقى والذي رأسه A (0,1,5.5) وضلعه BC طولـــه 6 سم ويقع على المستقيم MN حيث M (1,8,4) N (-3,1,3) ومثل نقطة في الفراغ تبعـــد عـــن رؤوس المستطيل بمقدار 7 سم .

21- عين مساقط المثلث ABC المتساوي الساقين والواقع في المستوى α ($0,45^0,135^0$) فيه A (3,4,?) والضلع AB مستقيم وجهي طوله 7 سم والضلع BC مستقيم أفقي ونقطة C تقع في المستوى الرأسي π_2 ثم عين الدائرة التي تمر برؤوس المثلث .

22- مثل كل من المستويين α,β اللذان يوازيا مستوى التماثل واستنتج أثارهما ، حيث يمر المستوى α بالنقطه A(6,7,1) ويمر المستوى β بالنقطه B(4,-2,4)

23- مثل كل من المستويين α,β اللذان يوازيا مستوى الإنطباق واستنتج أثارهما ، حيث يمر المستوى α بالنقطه A(5,7,1) ويمر المستوى β بالنقطه B(8,-5,5)

24- عين أثرى المستوى δ المكون من المستقيمين a,b المتقاطعين في N

أولا : b, N(2,1,4) أفقي يميل 45 على π_2 ، a وجهي يميل 120 على π_1

ثانيا : N (2,0,0) ، والمساقط a_2, a_1, b_2, b_1 , تصنع $60^0,135^0,30^0,150^0$ مع خط الأرض .

25- المعلوم مستقيم[m [A(9,1,4), B(5,3,1 والمطلوب تعيين الأثرين الأفقي والرأسي لمستوى α يحوي m بحيث يكون : أولا : α_1 موازى خط الأرض ثانيا : α_2 قاطع خط الأرض عند X=1

ثالثا : α_3 عمودى على π_1 رابعا : α_4 عمودى على π_2

26- مثل متوازي الأضلاع ABCD الواقع في المستوى α(-3,3,4) إذا كان ضلعه AD طوله 3 سم ويقع في المستوى الرأسي π_2 (B (1,?,0) A (-1,0,?)

27- عين مساقط المثلث ABC والواقع في المستوى($0,135^0,45^0$) β إذا كان AB مستقيم وجهي طوله 10 سم وكان BC مستقيم أفقي و الرأس C تقع في المستوى الوجهي .

28- عين مساقط المثلث ABC المتساوي الساقين والواقع في المستوى(7,7,?) α فيه AB =AC و A (7,?,1), B (1.5,1,?) والضلع AC جانبي .

29- مثل المعين ABCD إذا كان الحرف BC مستقيم أفقي وكان طول AB = 6سم و A (2.5,?,2.5) تقع في المستوى (-4,4,2) Ψ .

الباب السادس

الموضع

الموضــع

يبحث هذا الفصل العلاقة بين المستقيم والمستوى من حيث وضع كل منهما بالنسبة للأخر وتشمل الاتى:

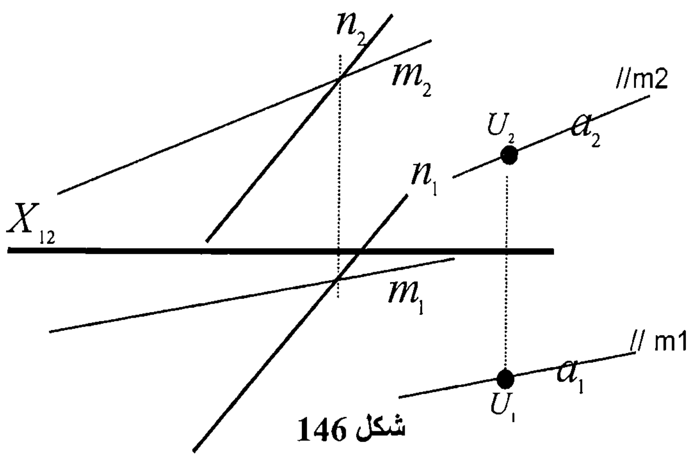
1. التوازى : كتوازى المستويات والمستقيم مع المستوى
2. التقاطع: تقاطع المستويات معا، وكذلك تقاطع المستقيم مع المستوى

1- التوازى بين المستقيم والمستوى

من المعروف فى الهندسة الفراغية أنه: يوازى مستقيم مستوى إذا وازى مستقيم داخل المستوى. وهذا يعنى أنه يمكن رسم من أى نقطة ملايين المستقيمات توازى المستوى. شكل **146**

مثال: أرسم من نقطة U مستقيم يوازى المستوى الممثل بمستقيمين m,n

الحل : لكى نرسم مستقيم يوازى مستوى يتم إختيار مستقيم داخل المستوى وليكن **m** ومنه نرسم من المسقط الأفقى للنقطة U_1 موازى للمسقط الأفقى للمستقيم **m** وهو a_1 $//m_1$ وكذلك من المسقط الرأسى للنقطة U_2 موازى للمسقط الرأسى للمستقيم **m** وهو $a_2 // m_2$ شكل **146** .

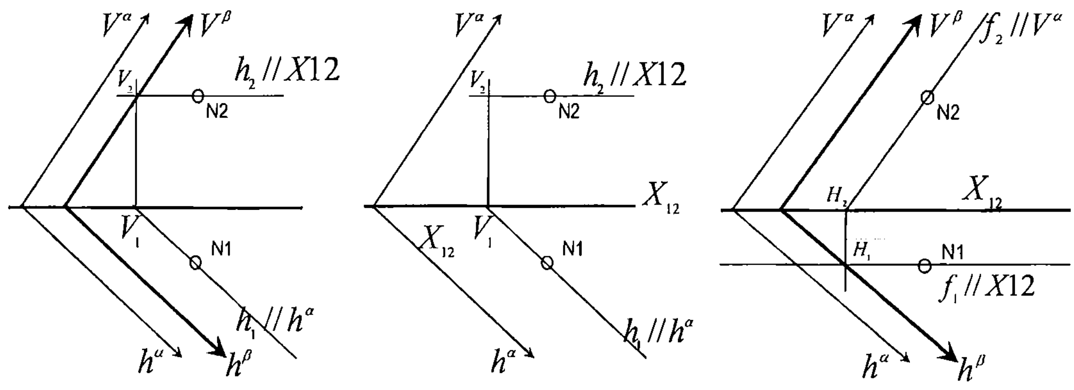


شكل 146

وهذا الحل يضمن التوازى ولكن يعيب هذا الحل أنه يعتمد على إختيار القائم بالرسم لأى مستقيم فى المستوى ليرسم موازى له. ولذلك فهناك ملايين الحلول لهذا التمرين . ومن هنا نشأت المقولة أنه لايجوز رسم مستقيم يوازى مستوى لأنهم ملايين الحلول وإنما يتم رسم مستوى من النقطة يوازى المستوى، وفيه يتضمن كل المستقيمات التى توازى المستوى وهذا هو الحل العام.

رسم مستوى يوازى مستوى من نقطة معلومة بالأثار

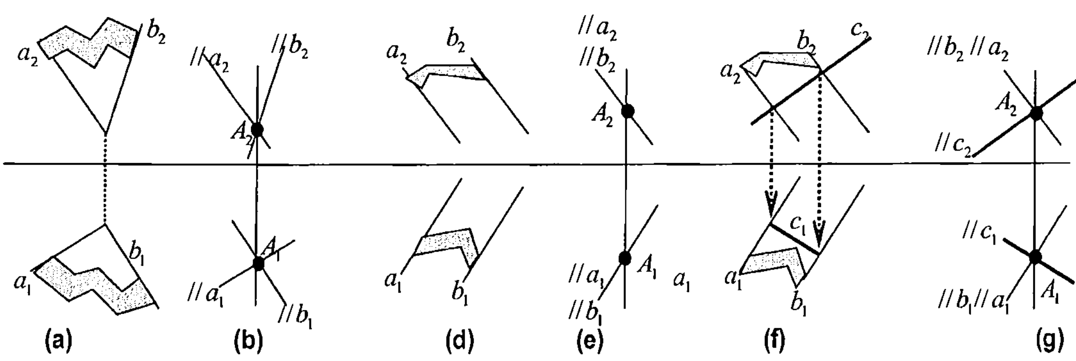
يتم رسم مستوى يوازى مستوى من نقطة N بتمرير مستقيم أفقى أو وجهى موازى من هذة النقطة حيث نحصل على أثر هذا المستقيم ومنة نرسم أثار المستوى الجديد توازى أثار المستوى القديم. شكل 147 يبين تمرير مستقيم افقى مـــن نقطه N حيث نحصل على أثرة الرأسى V_2 ومنة نرسم الأثر الرأسى للمستوى الجديد V^{β} يوازى الأثر الرأسى V^{α} حتى يقطع خط الأرض فى نقطة منها نرسم الأثر الافقى للمستوى الجديد h^{β} *يوازى الاثر القديم* h^{α} شـــكل 148. والعكس صحيح فى شكل 149 وذلك بتمرير مستقيم وجهى.



شكل 148 شكل 147 شكل 149

رسم مستوى ممثل بمستقيمين يوازى مستوى ممثل بمستقيمين من نقطة معلومة

فى شكل '149 الشكل (a) يوضح مستوى مميل بمستقيمين متقاطعين ، ولكى نرسم مستوى يوازيه من نقطة A كما فى الشكل (b) يتم رسم من هذه النقطة مستقيم //a ,ومستقيم //b كل منهم مساقطه توازى توازى مساقط كل

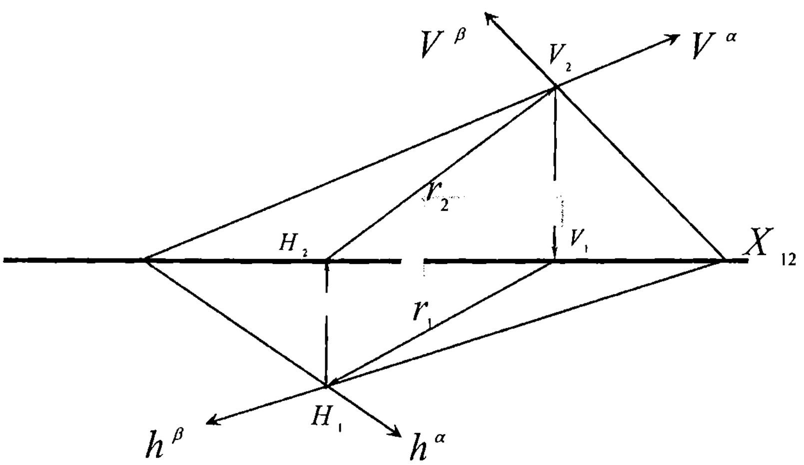


شكل '149

مستقيم كما هو موضح بالشكل. وفى الشكل (d) المستوى ممثل بمستقيمين متوازيين ولكى نرسم موازى له فى الشكل (e) نجد أن المستقيمن سينطبقا على بعض وبالتالى المستوى فى الشكل (e) ممثل بمستقيم واحد وهذا لايجوز، لذلك نلجأ للشكل (f) حيث نمرر أى مستقيم c داخل المستوى بإستخدام نظرية التوليد حيث نمرر c_2 ونستنتج c_1، ومن ذلك نرسم من النقطة A موازى للمستقيم c الواقع أيضا فى المستوى كما بالشكل (g)

2 - خط تقاطع مستويين

خط تقاطع المستويين ماهو إلا خط واقع فى كلا المستويين ، ومن علاقة المستقيم الواقع فى المستوى بالمستوى أن الأثر الأفقى للمستقيم يقع على الأثر الأفقى للمستوى وكذلك الأثر الرأسى للمستقيم يقع على الأثر الرأسى للمستوى . ومادام خط التقاطع يقع فى كل من المستويين فإن الأثر الأفقى لخط التقاطع H_1 يقع على الأثر الأفقى لكل من للمستويين h^α و h^β وكذلك الأثر الرأسى لخط التقاطع V_2 يقع على الأثر الرأسى لكل من للمستويين للمستوى V^α و V^β . وبذلك يكون معلوم أثار خط التقاطع وعلية نطبق قاعدة معلومية الاثار ومطلوب المساقط (إسقط عمود ووصل) ونستنتج مساقط خط التقاطع r_1, r_2 شكل **150**.

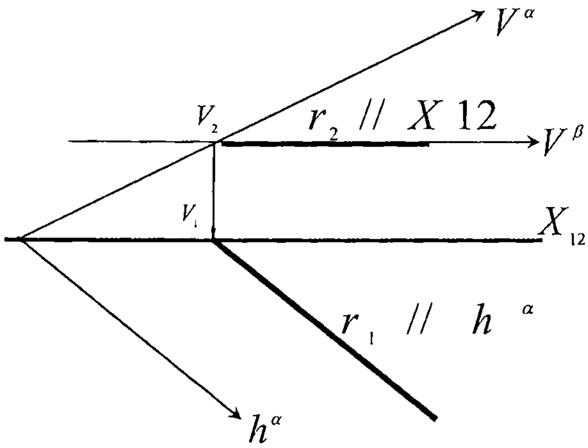


شكل 150

خط تقاطع مستويين أحدهما يوازى أحد مستويات الإسقاط: يكون مستقيم يوازى نفس مستوى الإسقاط

1. خط التقاطع لمستويين أحدهما مستوى أفقى: يكون خط التقاطع مستقيم أفقى

المستوى α وضع عام و المستوى β مستوى أفقي، عندما يتقاطع مستوى أفقي مع مستوى في وضع عام فإن خـــط التقاطع يحقق خواص المستويين، حيث أن كل المستقيمات التى تقع فى مستويات خاصة موازيه لمستوى الإسقاط يكون لها نفس خواص هذه المستويات الموازيه لمستوى الإسقاط وبالتالى خط التقاطع يكون مستقيم أفقي شكل **151**وهـــو أيضا يقع فى المستوى العام. وبناء على ذلـــك نرسم خط تقاطع أفقى يحقـــق خـــواص خـــط التقاطع بين المستويين ويحافظ على خواصه من حيث أنه مستقيم أفقي ويقع فى المستوى العام. ونعلم أن المستقيم الأفقي ليس له ســـوى أثـــر رأسي V_2 يقع على الأثر الرأسي للمســـتوى الموجود في وضع عام وأثرة الأفقي غير موجود شكل **151** .

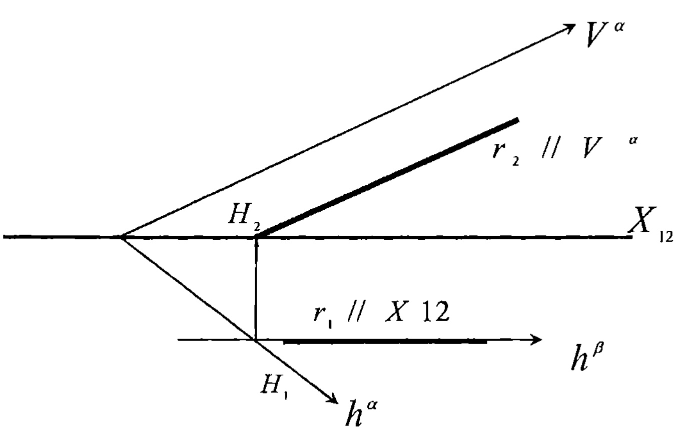


شكل 151 خط تقاطع مستويين احدهما افقى

حيث المسقط الرأسي لخط التقاطع $\mathbf{r_2}$ موازى لخط الأرض ويقع على الأثر الرأسي للمستوى الأفقي القـــاطع V^β و المسقط الأفقي $\mathbf{r_1}$ موازى للأثر الأفقي للمستوى العام ويظهر بطولة الحقيقي شكل **151** ويمكن الحـــل بأســـتخدام مستويات مساعدة كما سيتم الشرح قادما.

<u>2 . خط تقاطع مستويين أحدهما مستوى وجهى : يكون مستقيم وجهى</u>

عندما يتقاطع مســـتوى وجهـــى مـــع مستوى في وضع عام فإن خط التقاطع يحقق خواص المستويين، حيث *أن كـــل المستقيمات التى تقع فى مستويات خاصة موازيه لمستوى الإسقاط يكون لها نفس خواص هذه المستويات الموازيه لمستوى*

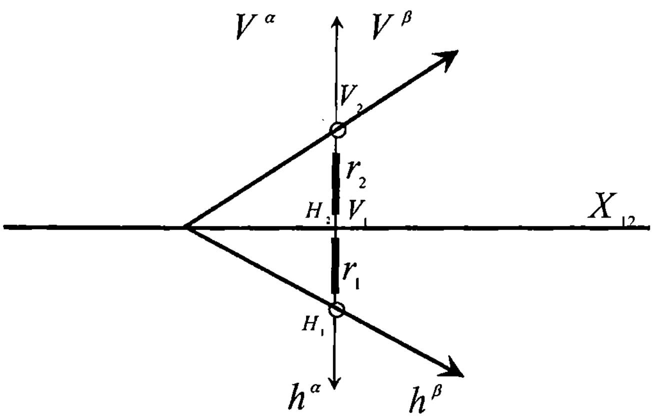


شكل 152 خط تقاطع مستويين احدهما وجهى

الإسقاط وبالتالى خط التقاطع يكون مستقيم وجهى وهو أيضا يقع فى المستوى العام شكل **152**. وبناء على ذلك نرسم خط التقاطع مستقيم وجهى يحقق خواص خط التقاطع بين المستويين ويحافظ عل خواصه من حيث أنه وجهى ويقع فى المستوى العام. فعندما يتقاطع مستوى وجهى β مع مستوى عام α فإن الناتج مستقيم وجهي أثرة الافقي H_1 يقع على الأثر الأفقي للمستويين العام والوجهى . و المسقط الأفقي لخط التقاطع r_1 يقع موازى **X12** في المستوى الأفقي ومنطبق على الأثر الأفقي للمستوى الوجهى h^{β} والمسقط الرأسي لخط التقاطع r_2 موازى للأثر الرأسي للمســـتوى العام ويظهر بطولة الحقيقي .

3. خط تقاطع مستويين أحدهما مستوى جانبى فإن خط التقاطع سيكون مستقيم جانبى

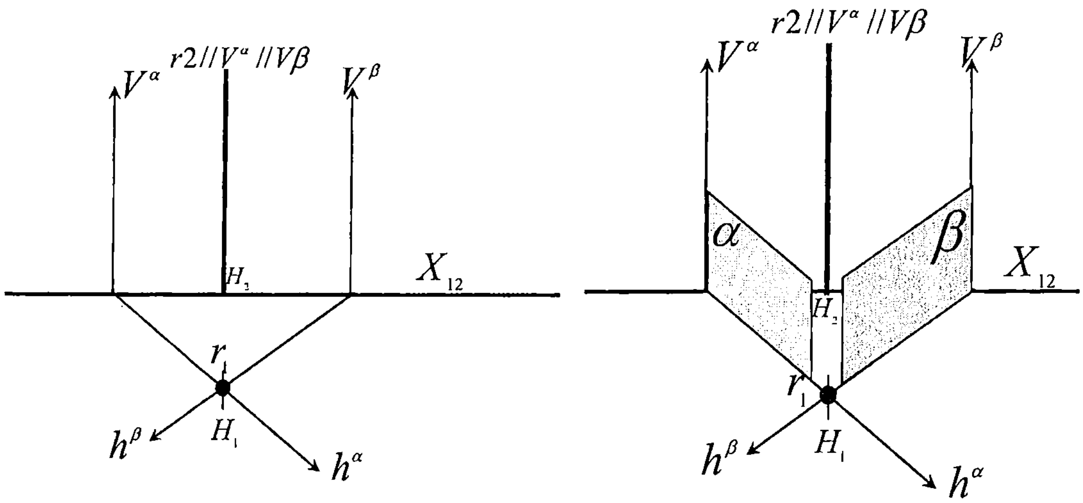
حيث ان كل المستقيمات التى تقع فى مستويات خاصة يكون لها نفس خواص هذه المستويات الخاصة وبالتـــالى خـــط التقاطع لمستوى عام مع مستوى جانبى يكون مستقيم جانبى وهو أيضا يقع فى المستوى العام شكل **153**. وبناء علـــى ذلك نبحث عن أثار خط التقاطع التى تحقق خواصه وفى ذات الوقت تحقق خواص خط التقاطع على أثار المســـتويات المتقاطعة كما يتضح فى الشكل **153** ، نلاحظ أن خط التقاطع سيكون مستقيم جانبى يظهر بطوله الحقيقى فى المستوى الجانبى.



شكل 153 خط تقاطع مستويين احدهما جـانبى

خط تقاطع مستويين متعامدين على أحد مستويات الإسقاط: يكون مستقيم عمودى على نفس مستوى الإسقاط.

1- خط تقاطع مستويين عموديين على المستوى الأفقى يكون مستقيم عمودى على المستوى الأفقى.



شكل 154 خط تقاطع مستويين عموديين على الأفقى

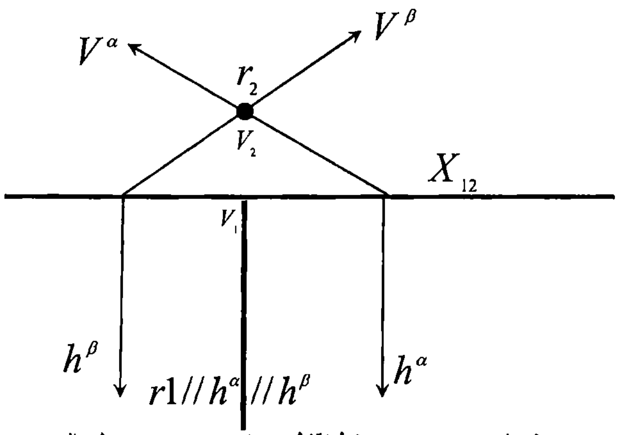
خط تقاطع مستويين متعامدين على أحد مستويات الإسقاط يكون مستقيم عمودى على نفس مستوى الإسقاط ونقطة إنطلاق خط التقاطع هى نقطة تقاطع خطيى المسقط للمستويين شكل **154**، حيث أن المستويين كل منهم خطى المسقط الأفقى وتقاطعهم فى الأفقى هو نقطة وهى مسقط خط التقاطع فى المستوى الأفقى. إذا نُركز على خـواص المسـتويين العموديين وعلى مكان تواجدهم فى خطى المسقط حتى ننطلق من نقطة تقاطع الخطين. وفى هـذه الحالـة نتيجـه لأن المستويين رأسيين فإن خط التقاطع سيكون مستقيم رأسى أى أن مسقطه الأفقى نقطه وهى نقطة تلاقى الأثار الأفقيـة للمستويين ويكون مسقطه الرأسى موازى للأثار الرأسية شكل **154**.

<u>وعامة هناك نتيجة يجب أن نعلمها ألا وهى:</u> إذا كانت أثار المستويين المتقاطعين متوازية فى أحد مستويات الإسـقاط (الرأسى π_2 أو الافقى π_1 أو الجانبى π_3) فإن مسقط خط التقاطع فى نفس مستوى الإسقاط يوازيهم . كما فى شكل **154** فى المستوى الرأسى الأثار الرأسيه للمستويين متوازيه وهى عموديه على الأفقى وبالتالى فإن مسقط خط التقاطع فى الرأسى يوازيهم أى يكون رأسى وهو بذلك مستقيم رأسى ويكون مسقطه الأفقى نقطـة. وكـذلك فى الحـالتين القادمتين. وبالتالى خط التقاطع لأى مستويين نأتى به إما بدراسة خواص المستويين أو بدراسة الأثار. ويمكن إسـتخدام مستويات إضافية لإستنتاج خط التقاطع وسيتم شرحها فى البنود القادمة.

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

2. خط تقاطع مستويين عموديين على المستوى الوجهى يكون مستقيم عمودى على المستوى الوجهى

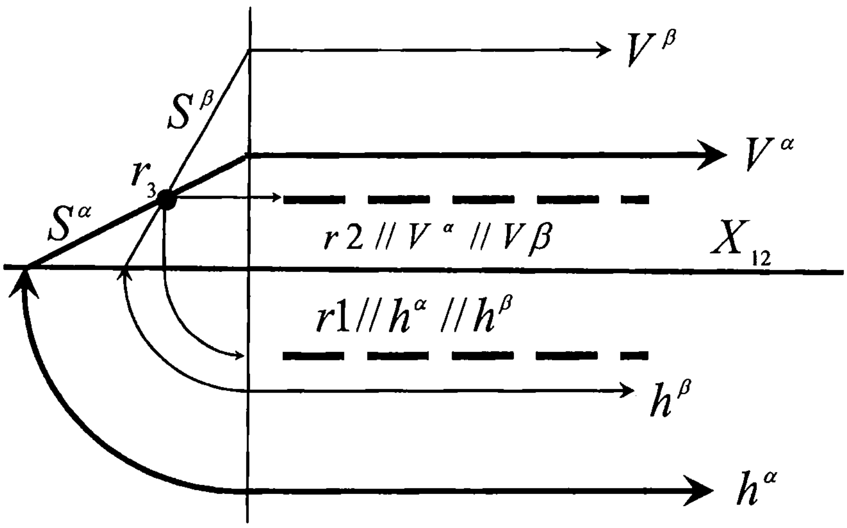
بنفس القاعدة السابقة فى شكل 155 يمكن إستنتاج مساقط خط التقاطع فيكون مستقيم عمودى على المستوى الرأسى ويحقق خواص خط التقاطع وعلاقته بأثار المستويين المتقاطعين فيه.



شكل 155 خط تقاطع مستويين عموديين على الوجهى

3. خط تقاطع مستويين عموديين على المستوى الجانبى يكون مستقيم عمودى على المستوى الجانبى

بنفس القاعدة السابقة يمكن إستنتاج مساقط خط التقاطع لمستويين عموديين على المستوى الجانبى شكل 156 حيث الأثار الأفقية متوازية فيكون مسقط خط التقاطع الأفقى موازى



شكل 156 خط تقاطع مستويين عموديين على الجانبى

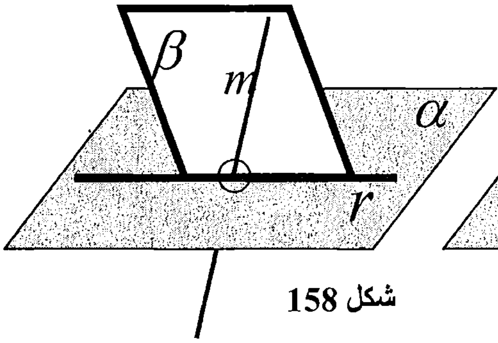
لهم، وأيضا الأثار الرأسية متوازية فيكون مسقط خط التقاطع الرأسى موازى لهم ولكن يبقى نقطة إنطلاق مساقط الخط r . نقطة الإنطلاق هذه لاتظهر إلا فى تقاطع خطى المسقط للمستويين وهى موجودة فى الجانبى لأنهم مستويين عموديين على الجانبى وذلك كما سبق القول أن خط تقاطع أى مستويين عموديين على مستوى الإسقاط يكون مستقيم عمودى على نفس مستوى الإسقاط شكل 156 . ومما تقدم فإن خط التقاطع مستقيم يوازى خط الأرض وعمودى

على المستوى الجانبى أى نقطه فى الجانبى. " خط تقاطع مستويين يوازيا خط الأرض هو مستقيم يوازى خـــط الأرض".

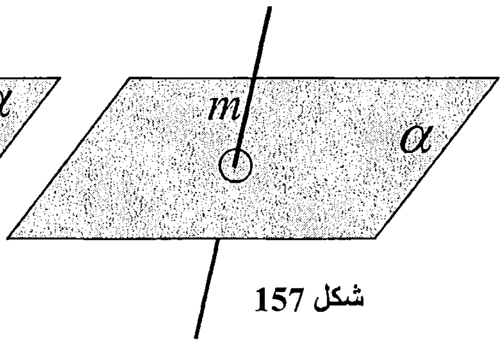
وبذلك يتم الخروج من نقطة تقاطع خطى المسقط فى الجانبى ونرسم مساقط خط التقاطع توازى الأثار شكل **156**.

3-نقطة تقاطع مستقيم مع المستوى العام

نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى هي النقطة الواقعة على المستقيم وفى المستوى في وقت واحد كما بالشـــكل **157** ولكـــن لتحديدها يتم تمرير أي مستوى جديد بهذا المستقيم (شكل **158**) ويكون حينئذ خط تقاطع المستوى الجديد مع المســـتوى القديم هو المحل الهندسي لنقطة التقاطع شكل **158**ونحدد أكثر بتقاطع المستقيم الموجود مع خط تقاطع المستويين.

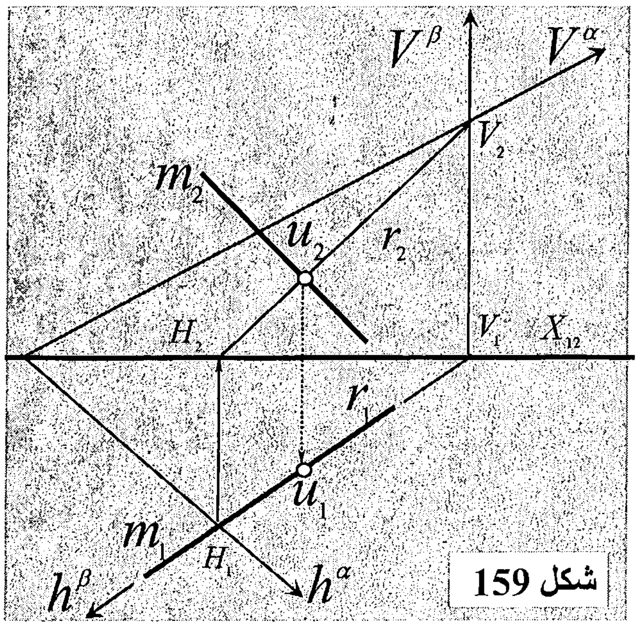


شكل 158



شكل 157

خطوات تعيين نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى عام:



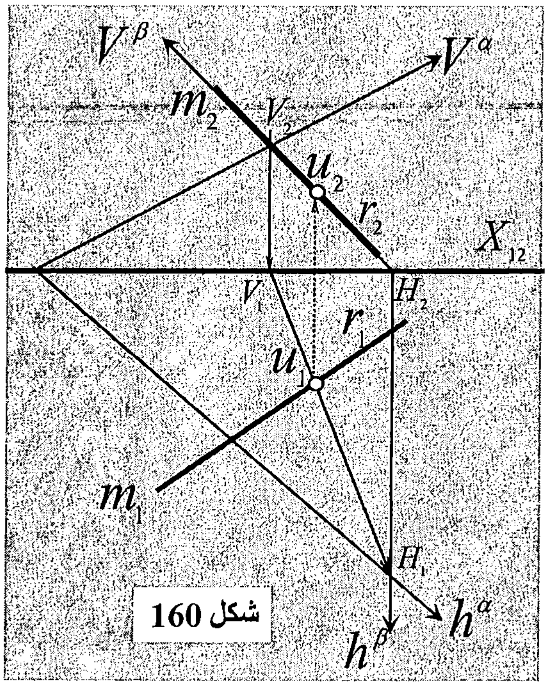
شكل 159

1- نمرر بالمســـتقيم **m** مســـتوى عمـــودى βعلى π_1 شكل **159** أو عمودى على π_2 شكل **160**.

2- تعيين خط تقاطع المستوى العمودى مـــع المستوى الموجود يكون **r** . شـــكل **159** و شكل **160**

3- تعيين نقطة تقاطع المستقيم مع خط التقاطع فتكون $m \cap r = U$ هي النقطة المطلوبـــة. شكل **159**و شكل **160**

ويتم ذكرها كالتالى : نمرر بالمستقيم مستوى خاص فتتحول الحالة لخط تقاطع مستويين، خط التقاطع الناتج هـــو الذى يقطع المستقيم الموجود فى نقطه U وهـــى نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى. فـــإذا كـــان التمرير ب m_1 شكل 159 فإن نقطة التقاطع U_2ستظهر على m_2 بتقاطعه مع r_2 ثم بالتناظر نوجد U_1 ، وإذا كان التمرير ب m_2 شـــكل 160 فإن نقطة التقاطع U_1 ستظهر علـــى m_1 بتقاطعه مع r_1 ثم بالتناظر نوجدU_2 .



شكل 160

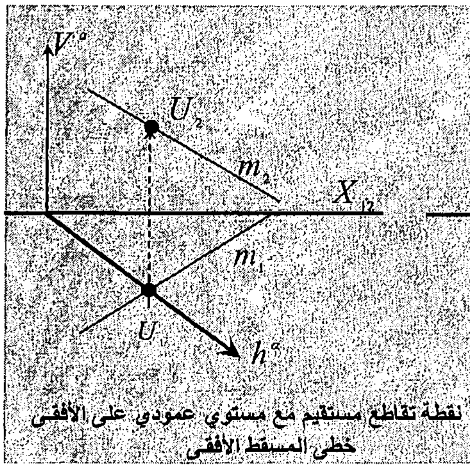
ولابد أن نركز فى الخطوات جيدا ونحفظ ترتيبها حتى تسهل دائما الحل.

نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط

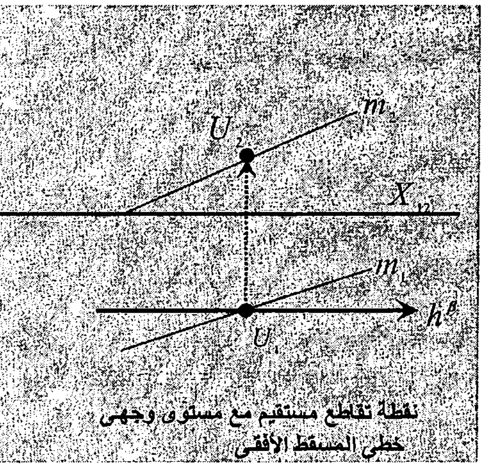
نتيجة: نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط تظهر مباشرة فى مكان خطى المسقط

1. نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط الأفقى العمودى على المستوى الأفقى تظهر مباشره على المستوى الأفقى

فى تقـــــــــاطع المستقيم مع خطى المسقط الأفقـــى. شـــــكل 161 يوضـــح نقطـــة تقاطع المســـتقيم مـــع مســـتوى



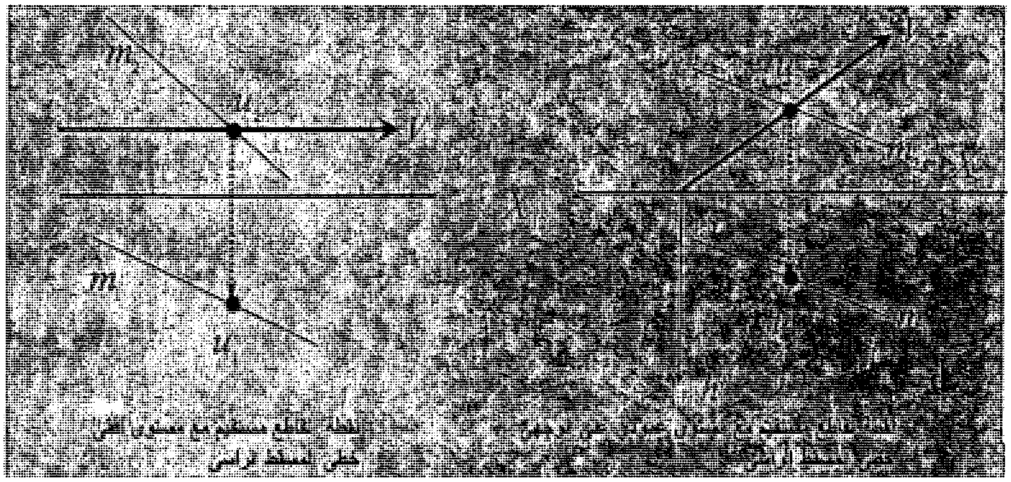
شكل 161



شكل 162

عمودى على المستوى الأفقى (خطى المسقط الأفقى)، شكل 162يوضح نقطة تقاطع المستقيم مع مستوى وجهى عمودى على المستوى الأفقى (خطى المسقط الأفقى).

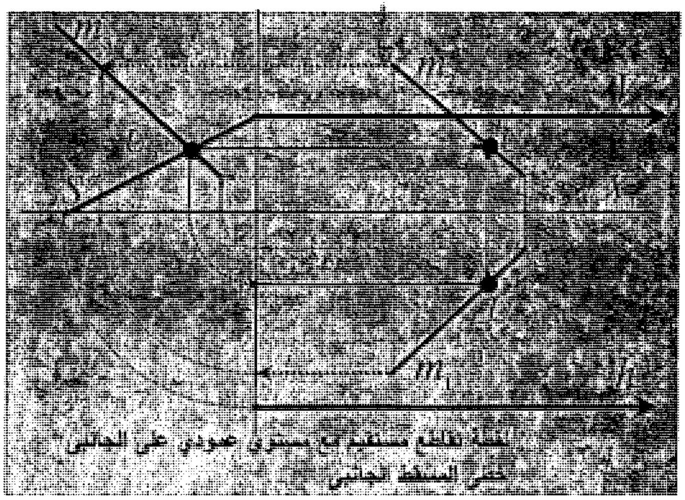
نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط الرأسى (العمودى على المستوى الرأسى)



شكل 164 شكل 163

نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط الرأسى العمودى على المستوى الرأسى تظهر مباشره فى المستوى الرأسى على تقاطع المستقيم مع خطى المسقط الرأسى. شكل 163 يوضح نقطة تقاطع المستقيم مع مستوى عمودى على المستوى الرأسى (خطى المسقط الرأسى)، شكل 164يوضح نقطة تقاطع المستقيم مع مستوى أفقى عمودى على المستوى الرأسى (خطى المسقط الرأسى).

3. نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطى المسقط الجانبى العمودى على المستوى الجانبى (المستوى الموازى لخط الأرض ، المستوى الذى يمر بخط الأرض، مستوى التماثل ،مستوى الإنطباق، الموازى للتماثل، الموازى للإنطباق)

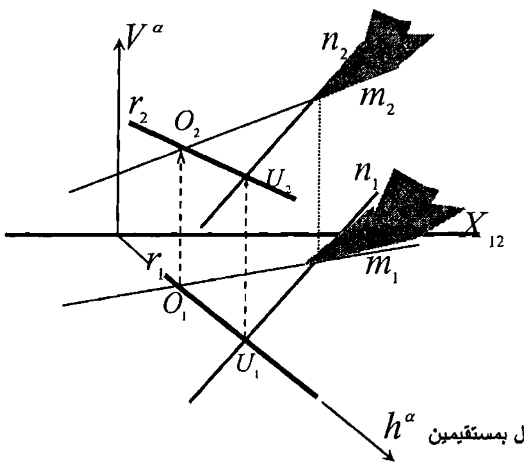


شكل 165

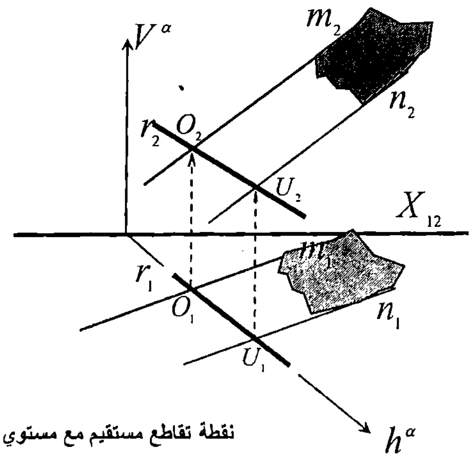
كل هذه المستويات المذكورة لها نفس الخاصيه، عموديه على المستوى الجانبى شكل **165**، خطية المسقط الجانبى "فـــى الثلاثات" أى أن نقطة تقاطعها مع أى مستقيم تظهر فى الثلاثات أى فى المسقط الجانبى ، وعليه فدائما نذهب بالمستقيم لمسقطه الجانبى ثم نوجد نقطة التقاطع ونعود بها. ومن كل ماتقدم فسوف نستغل هذه الخاصية لخطى المسقط فى إيجـــاد خط تقاطع مستويين وكذلك نقطه تقاطع مستقيم مع مستوى ولكن سيكون المستوى ممثل بمستقيمين .

خط تقاطع مستويين أحدهما مستوى خطى المسقط والأخر ممثل بمستقيمين (بمجرد النظر)

الفكرة: لنأتى بخط تقاطع مستويين بهذا الشكل نأتى بنقطة تقاطع كل مستقيم مع المستوى ثم نصل النقطتين فيكونا خط تقاطع المستويين شكل **166** وشكل **167**. ونتيجة لأن المستوى الأول خطى المسقط فإن نقطة تقاطع كل مستقيم مـــع هذا المستوى الخطى المسقط تظهر مباشرة فى إتجاه خطى المسقط. لذلك فالحل يكون أسهل مايمكن فى شكل **166** شكل **167**حيث ننظر لنقطتى التقاطع الظاهرين بمجرد النظر U_1 ,O_1 وهما r_1 على خطى المسقط نصعد بهم فنوجد مسقط



شكل 166

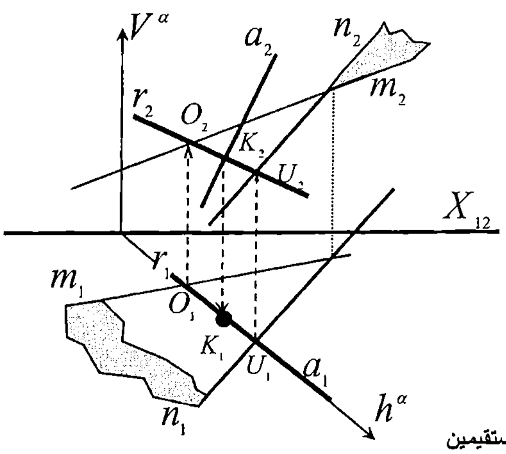


شكل 167

خط التقاطع O_2 U_2 وهما r_2. وكما بالأشكال الموضحة فإن هذا يتم للمستوى الممثل بمستقيمين سواء متوازيين شكل **167** أو متقاطعين شكل **166**. وكما ترى أن الحل أصبح بمجرد النظر على نقطتى التقاطع الظـــاهرين حيـــث نـــأتى بمساقطهم بالتناظر ونوصلهم فينتج خط التقاطع . أى أن الحل يتلخص فى = صعود نقطتين.

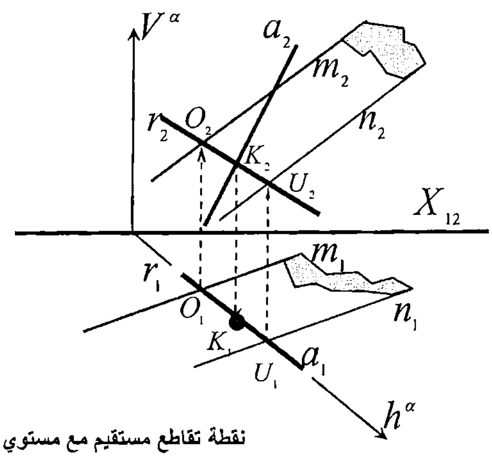
نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى ممثل بمستقيمين (متقاطعين أو متوازيين)

من نفس الخطوات العامة فى تحديد نقطة تقاطع مستقيم مع المستوى العام، حيث نمرر بالمستقيم مستوى خاص فتتحول الحالة لخط تقاطع مستويين،وكذلك من الحالة السابقة، يتم نفس الإسلوب ولكن أسهل حيث أنـه بمجـرد أن نمـرر بالمستقيم مستوى خاص (خطى) فتتحول الحالة لخط تقاطع مستويين وهى الحالة السابقة حيث أن أحد المستويين خطى المسقط وبالتالى سهل أن نوجد خط التقاطع بنفس الإسلوب السابق ومن ثم نوجد نقطة تقاطع المستقيم مع خط التقاطع فتكون نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى كما بالشكلين 168و 169، وقد راعينا أن تكون الحالتين موجودتين فى تمثيل المستوى سواء كان بمستقيمين متوازيين شكل 169 أو متقاطعين شكل 168. أى أن الحل أيضا يتلخص فى = صعود نقطتين –توصيل – نزول نقطة.



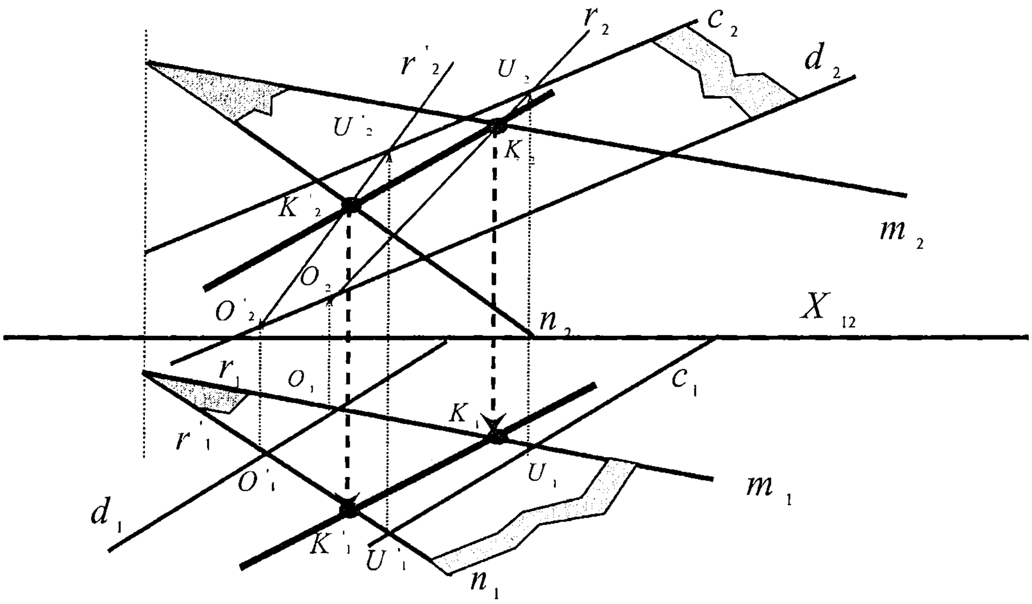
شكل 168

نقطة تقاطع مستقيم مع مستوي ممثل بمستقيمين



شكل 169

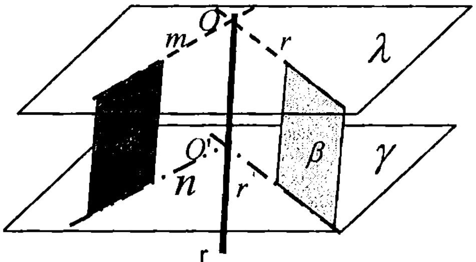
خط تقاطع مستويين كلاهما ممثل بمستقيمين " بإستخدام إسلوب نقطه تقاطع مستقيم مع المستوى العام"



شكل 170 خط تقاطع مستويين كل منهما ممثل بمستقيمين

الحل الأول: كما بالشكل **170** نأخذ أحد المستويات الممثل بمستقسمين **c,d** ، ونوجد نقطة تقاطع كل مستقيم منهم مع المستوى الأخر بأسلوب البند السابق وماقبله، ثم نصل نقطتى التقاطع، حيث نوجد نقطة تقاطع *m* معع المستوى الممثل بالمستقيمين المتوازين **c,d**ونجد أنها **K**، ثم أيضا نقطه تقاطع *n* مع نفس المستوى الممثل بالمستقيمين المتوازين **c,d**ونجد أنها **K'**، ثم نصل نقطتى التقاطع **KK'** فيكون خط التقاطع. وهناك أُسلوب أخر للحل سيتم عرضه بعد البند القادم. وبالتالى فإن فكرة الحل هى تكرار نفس إسلوب البند السابق مرتين وهو = صعود نقطتين –توصيل – نزول نقطة. مرة على المستقيم **m** فنستنتج نقطة تقاطع وأخرى على المستقيم **n** فنستنتج الأخرى ثم توصيل النقطتين فيكون خط التقاطع

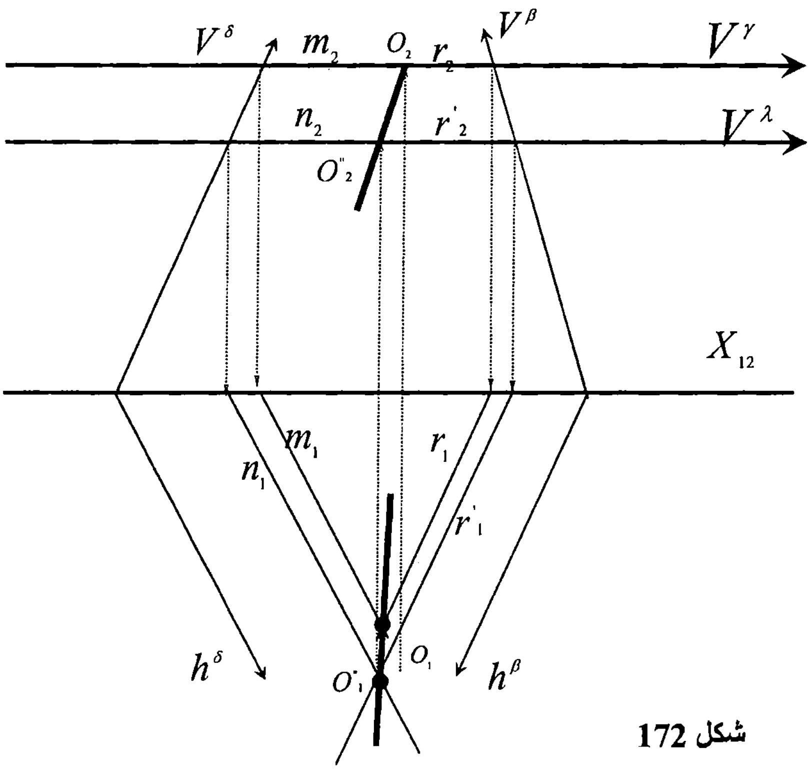
خط تقاطع مستويين بإستخدام مستويات مساعدة



شكل 171

1– خط تقاطع مستويين أحد أثارهم لاتتلاقى فى حدود الورقة

كما يتضح فى الشكل الفراغى شكل **171** أن كل من المستويين α, β لايتقاطعا وعليه فإننا لو إستطعنا إيجاد أى نقطتين على خط التقاطع **O,O'** وتم توصيلهم يكون هو خط التقاطع **r**. ونيجة لإستحالة تلاقى الأثار، نستخدم مستويات مساعده ، حيث نمرر مستوى أفقى إضافى λ يقطع كل من المستويين فى خط كما بالشكلين**171**و **172** الموضح فيكون الخطين **m,r** هذين الخطين يتقاطع إمتدادهما فى نقطة **O** وهى نقطة علـــى خط التقاطع. ونكرر ذلك بإستخدام المستوى المساعد الأخــــر γ شــــكل **171**و**172** حيث ينــتج خطى تقاطع **n,r'** ويتقاطعا فى **O'** نقطة أخرى علـــى خط التقــاطع. بتوصـــيل **OO'** هو خـــط تقـــاطع المستويين.



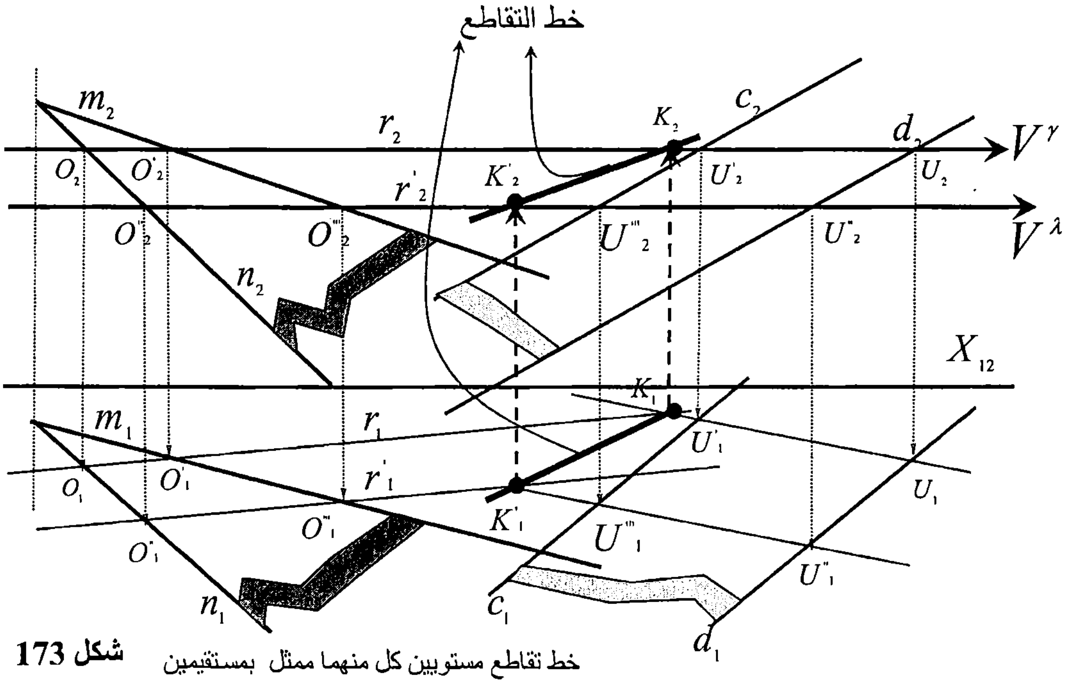
شكل 172

خط تقاطع مستويين لاتتلاقى فى حدود الورقة

تنبيه: المستقيمان الناتجة من التقاطع وهى **m,n,r,r'** مستقيمان أفقية لأنها موجودة داخل مستويات أفقية λ و γ ولو تم إستخدام مستويات وجهية ستكون خطوط التقاطع مستقيمات وجهية (كما سبق فى البنود الأولى فى إيجاد خط تقاطع مستويين).

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

2- خط تقاطع مستويين كلاهما ممثل بمستقيمين ' بإستخدام إسلوب خط تقاطع

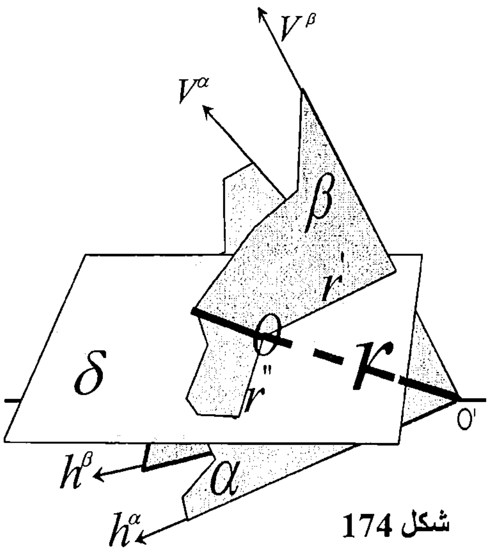


شكل 173 خط تقاطع مستويين كل منهما ممثل بمستقيمين

مستويين'

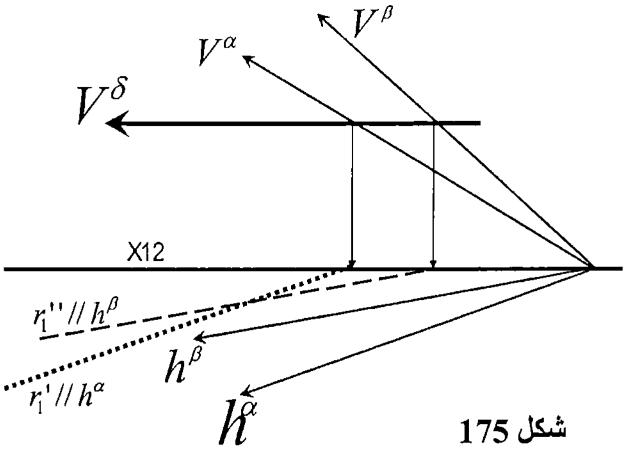
بنفس الإسلوب السابق حيث أنها نفس الحالة السابقة ولكن المستوى ممثل بمستقيمين ، وبإستخدام مستويات مساعدة أفقية أو وجهية ، وفى الشكل الموضح **173** تم إستخدام مستويين أفقيين. نمرر المستوى الأفقى الأول V^{γ} على أى إرتفاع فيقطع المستوى الممثل بالمستقيمين **c,d** فى المستقيم **UU'** (مستقيم أفقى) و يقطع المستوى الممثل بالمستقيمين **m,n** فى المستقيم **OO'** (مستقيم أفقى) هذين الخطين مساقطهم الأفقية تتقاطع فى نقطة **K** نوجد مسقطها الرأسى على المساقط الرأسية لخطوط التقاطع. نكرر نفس الإسلوب بتمرير مستوى أخر V^{λ} يقطع كل من المستويين فى خط، الخطين يتقاطعا فى نقطة **k'**، نوجد مسقطها الرأسى على المساقط الرأسية لخطوط التقاطع. نصل النقطتين **k,k'** فيكون خط التقاطع، شكل **173**.

خط تقاطع مستويين أثارهم تتلاقى فى نقطة واحدة على خط الارض



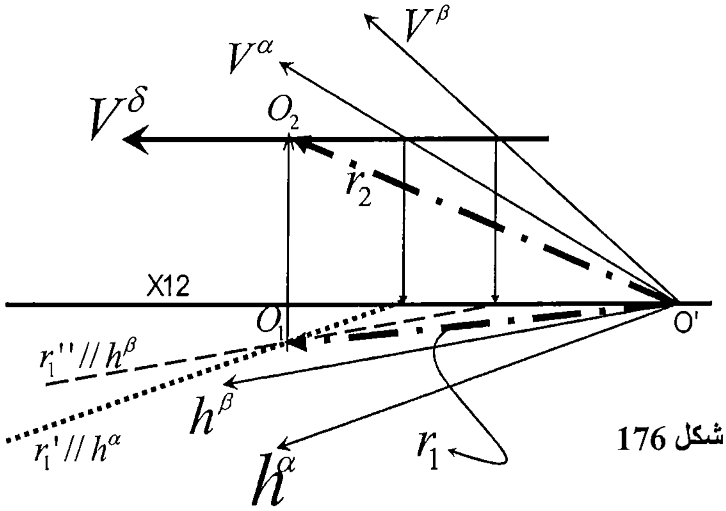
شكل 174

مستويين متقاطعين فى نقطة واحدة على خط الارض شكل 174 يعنى أنه معلوم نقطة على خط التقــاطع وهــى **O'** وبالتالى يبقى نقطة على خط التقاطع ونتيجة لأننا لو مررنا مستوى خاص δ أشكال **174**و **175** فإنه يقطع كل من المستويين فى خط، هذين الخطين **r', r''** يتقاطعا فى نقطــة على خط التقاطع **O** شكل **175**، خطى التقاطع ينتجــا من: المستوى α مع المستوى δ هو **r'** ، المستوى β مع المستوى δ هو **r''** . الخطين يتقاطعا فى **O** نصلها بنقطه تقاطع المستويين **o'** فى كل مــن المسقط الافقى والرأسى فيكون مسقطى خــط التقاطع **r** ، أشكال**174**و **175**. شكل **176** يوضح الشكل النهائى لخط التقاطع فى كل من المسقطين الرأسى والأفقى.



شكل 175

ومــن الشــكل الفراغــى **174** نلاحظ أن الــثلاث مســتويات تقاطعوا فى نقطة واحدة وهى **O'** . وهذه من النتائج الهامــة أن أى ثلاث مستويات لاتحمــل نفــس الصفه تتقاطع جميعهــا فى نقطــة واحدة.

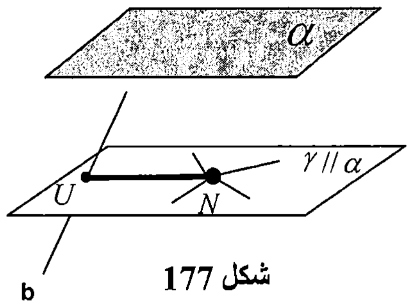


شكل 176

مثال: المعلوم نقطة N(9,3,3) والمستقيم [A(4,0,2) , B (11,7,6)] b ومستوى ($16,60^0,135^0$) α والمطلوب تعين المستقيم d والذى يمر بنقطة N ويقطع b ويوازى α، أذكر الحل الفراغى ومثل بالاسقاط

الحل:

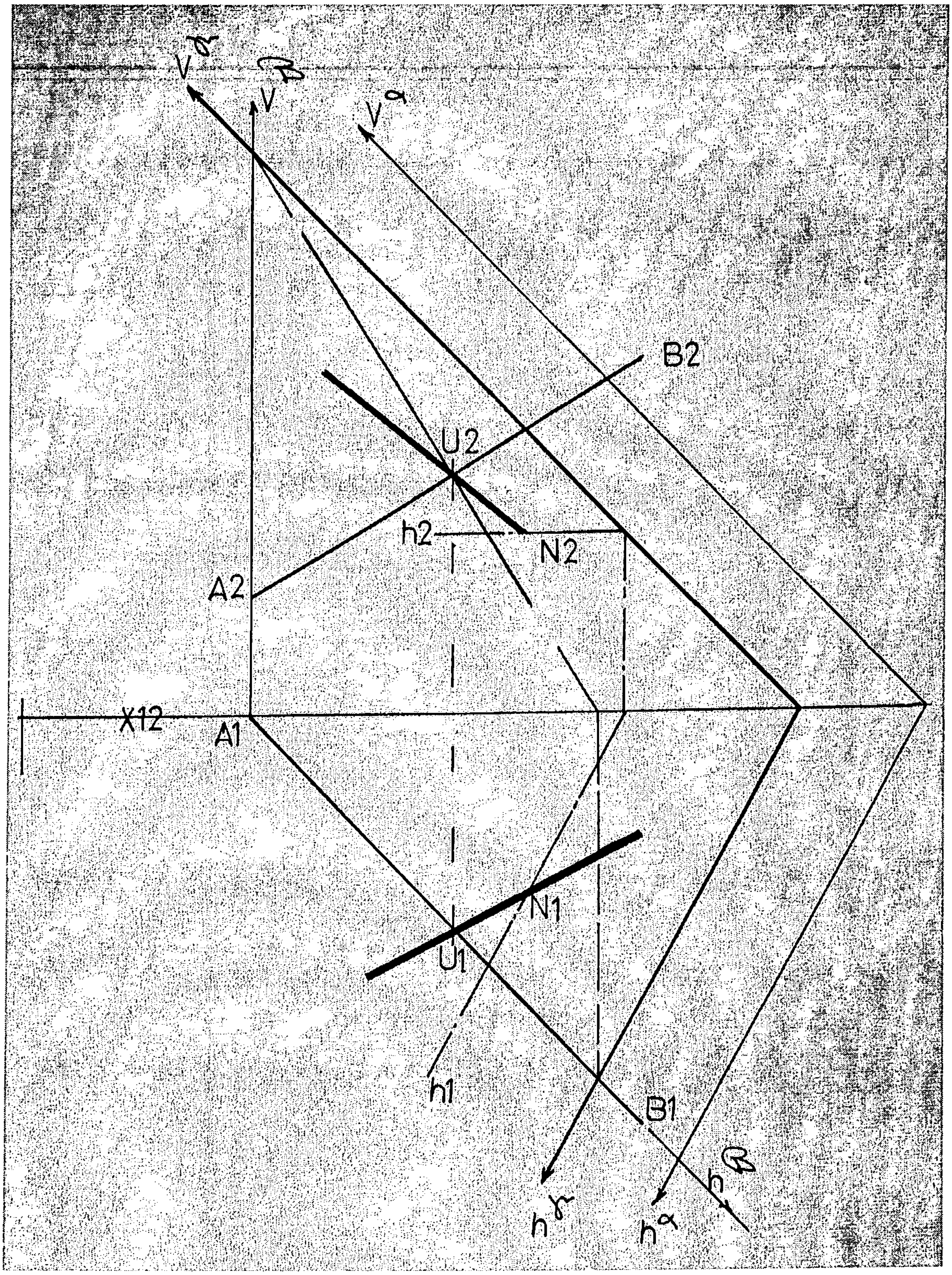
المطلوب مستقيم قاطع يمر بالنقطة N ويوازى المستوى α، ويجب أن نعلم أنه لايوجد فى الهندسة الوصفيه عملية رسم مستقيم يوازى مستوى لان شرط أن يوازى مستقيم مستوى هى أن يوازى مستقيم بداخل المستوى. ونتيجة لان المستوى يحمل ملايين المستقيمات فإن عملية رسم مستقيم يوازيه ليست محدده لأننا لانعرف سنرسم موازى لأى من المستقيمات فى المستوى شكل 177 .لذلك تكون الفكرة رسم مستوى يوازى المستوى من هذه النقطه ويكون هذا هو الحل الهندسى لكل المستقيمات التى توازى المستوى المطلوب ويتوقف إختيار المستقيم الموازى على شرط أخر يكون مطلوب للحل فيتحدد عليه المستقيم المطلوب.



شكل 177

خطوات الحل الوصفى: شكل **178**

1. *من نقطة N نرسم المستوى γ يوازى المستوى α*
2. *نوجد نقطة تقاطع المستقيم b مع المستوى γ وهى نقطة U*
3. *نصل نقطة N بنقطة U فيكون هو القاطع الموازى للمستوى α*

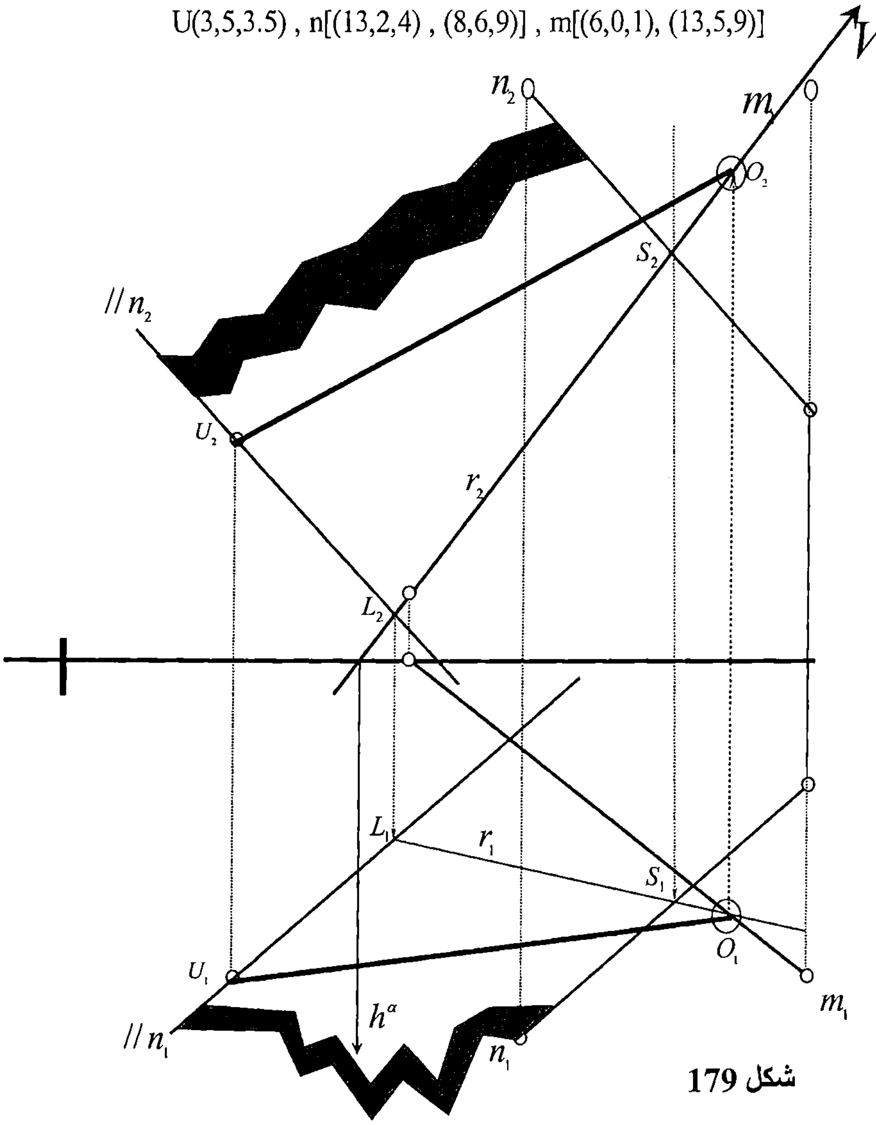


شكل 178

قاطع لمستقيمين شماليين ويمر بنقطة معلومة

عين قاطع لمستقيمين شماليين m,n بحيث يمر بنقطة U اذا كان

U(3,5,3.5) , n[(13,2,4) , (8,6,9)] , m[(6,0,1), (13,5,9)]



شكل 179

الحل:

1–نكـــون مـــن النقطــة U وأحــد المستقيمات مستوى (وذلك برسم موازى للمَستقيم من النقطه U فيكون المســتوى ممثــل بمســتقيمين متوازيين ويمكن أيضا أن يكونوا متقاطعين بأن نصل نقطــة U بــأى نقطــة علــى المســتقيم) شــكل 179، وفى هـــذه الحالة نكون من U والمستقيم n مستوى وذلك برسم مستقيم //n من U فيكون المستوى ممثل بمستقيمين متوازيين شكل **179**.

2–نوجد نقطة تقاطع المستقيم الاخر وهو m مع المستوى الجديد، بأن نمرر بالمستقيم مستوى خاص ، حيث نمرر ب m_2 مستوى α عمودى على المستوى الرأسى فتتحول الحالة لخط تقاطع مستويين و نوجد خط التقاطع بأســتخدام أسلوب التقاطع الخاص بخطى المسقط حيث نوجد L_2, S_2 ومن ثم بالتناظر نوجد S_1,L_1 ويكون هذا هو r_1 والذى يقطع m_1 فى O_1.شكل 179

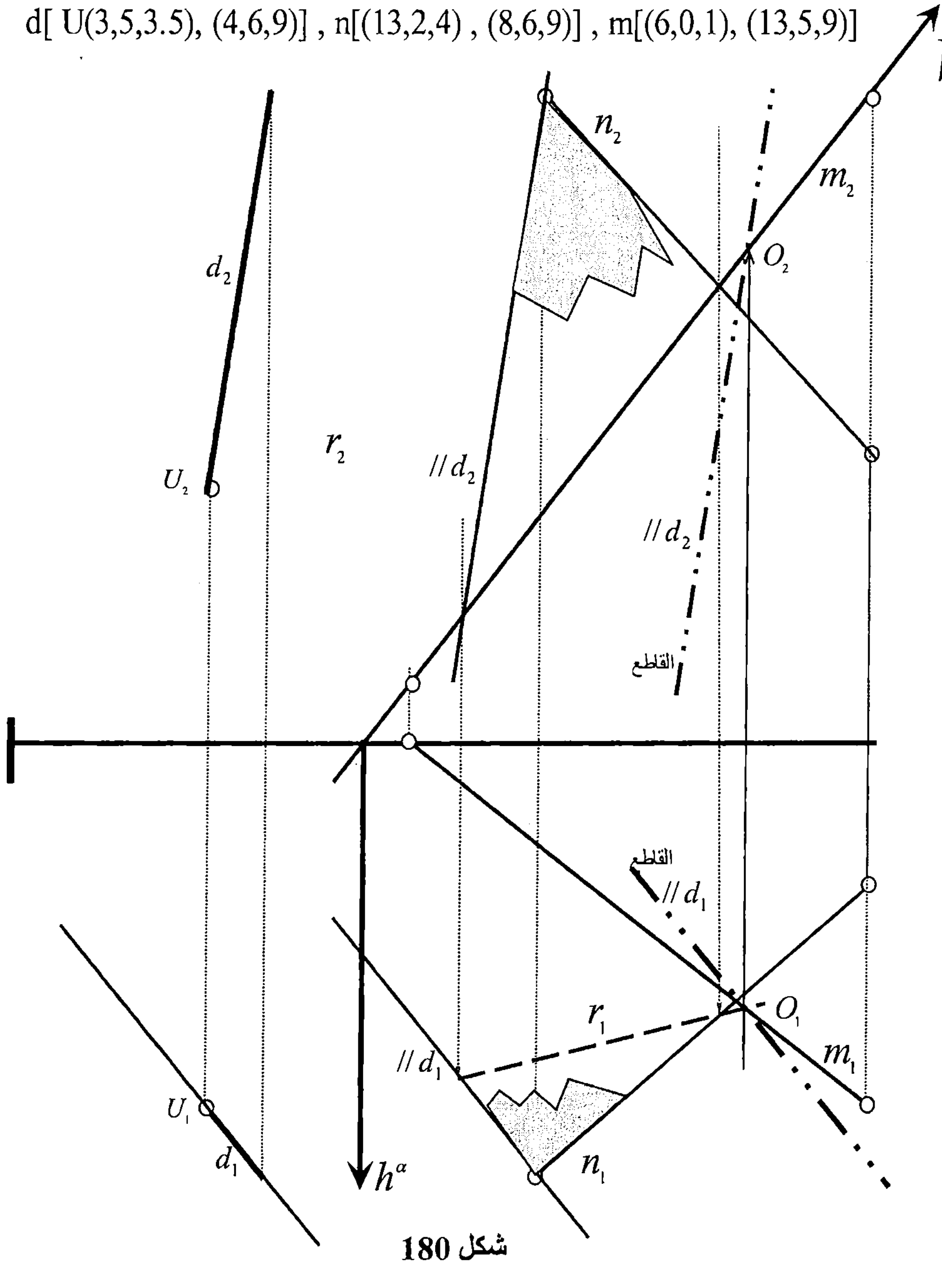
3– نصل U ب O ونمده فيقطع المستقيم الاخر فيكون هذا هو القاطع المطلوب .

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

قاطع لمستقيمين شماليين ويوازى إتجاه معلوم

عين قاطع لمستقيمين شماليين m,n بحيث يوازى الإتجاه d اذا كان

d[U(3,5,3.5), (4,6,9)] , n[(13,2,4) , (8,6,9)] , m[(6,0,1), (13,5,9)]



شكل 180

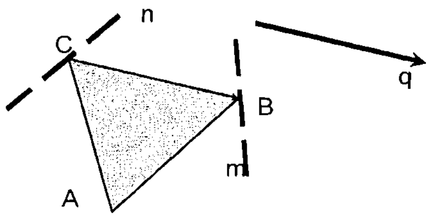
الحل: **1**-نكون من أحد المستقيمات وليكن **n** والإتجاه الموازى **d** مستوى (وذلك برسم موازى للإتجاه **d** مـــن أى نقطه على المستقيم **n** فيكون المستوى ممثل بمستقيمين متقاطعين هما **n** والموازى للإتجاه //**d**) شكل **180**

2–نوجد نقطة تقاطع المستقيم الأخر وهو m مع المستوى الجديد المكون من n والموازى للإتجاه d// وهى نقطة O بأن نمرر من m_2 مستوى عمودى فتنتج نقطة التقاطع على m_1. شكل 180

3– من O نرسم موازى للإتجاه فيكون هذا هو القاطع المطلوب الموازى للإتجاه المعلوم ويقطع المستقيمين، ونلاحظ أنه يقطع المستقيمين على نفس نقطتى التناظر فى المستقيمين شكل 180. *بنفس الإسلوب يمكن حل المثال الاتى:*

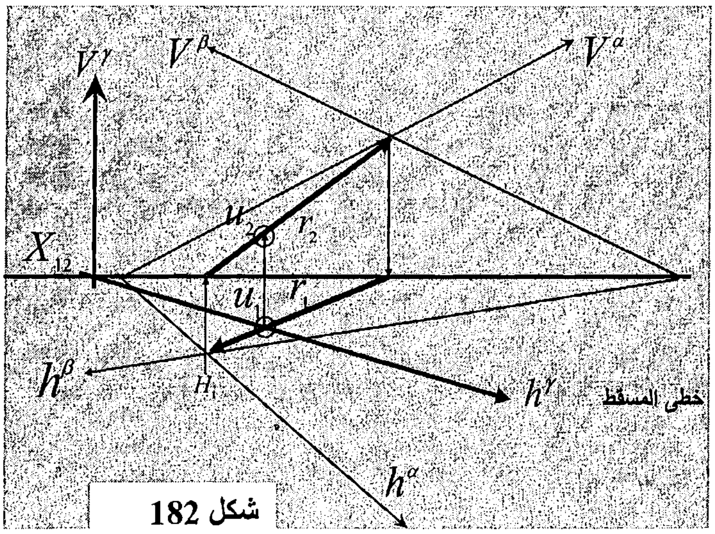
مثل المثلث الذى فيه A(5,6,0.5) والضلع BC يوازى المستقيم q وتقع نقطة B على المستقيم m ونقطة C تقع على المستقيم n. M [N(10,5,0.5), F(6,0,5)], q[R(12,2,2), O(9,1,3)], n[P(5,2,3.5), Q(0,4,0)]

الحل: الضلع BC يوازى المستقيم q والمستقيمان m,n مستقيمان شماليان شكل 181، بالتالى BC هو قاطع لمستقيمين شماليين ويوازى إتجاه معلوم هو q. لذا يتم حل المثال على أنه قاطع لمستقيمين شماليين m,n ويوازى إتجاه معلوم هو q والقاطع للمستقيمين يكون هو المستقيم BC حيث تكون Bعلى m والنقطه Cعلى n.



شكل 181

عين النقطة المشتركة بين الثلاث مستويات α,β,γ



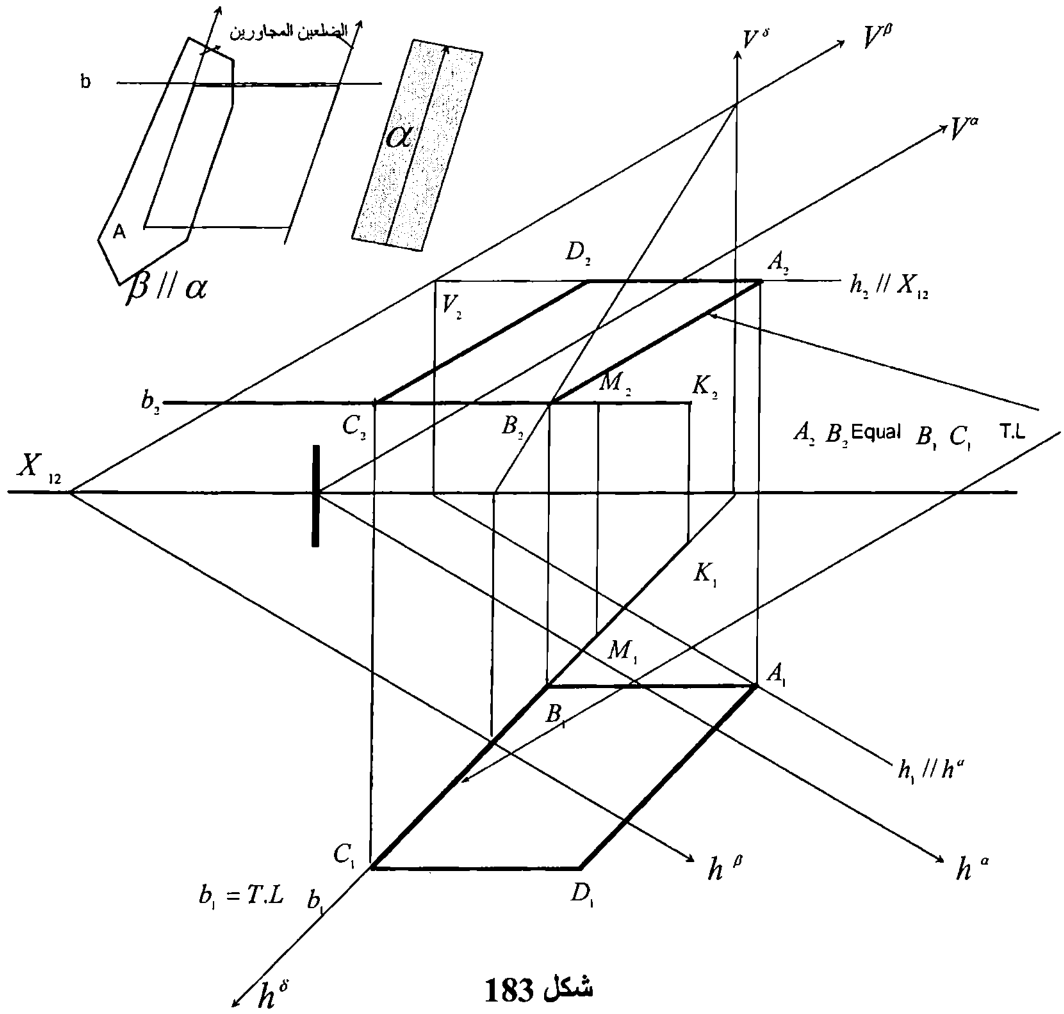
شكل 182

الحل: أى ثلاث مستويات عامة تتقاطع فى نقطة واحدة شكل 182، حيث يتقاطع اى مستويين فى خط ، هذا الخط يتقاطع مع المستوى الثالث فى نقطة، أو بنظرة أخرى كل مستويين يتقاطعا فى خط وبذلك يتقاطع الخطين فى نقطة.

فى شكل 182 يوضح الأتى: $\beta\cap\alpha=r$ ثم $r\cap\gamma=U$.

مثل المعين ABCD حيث رأسة (A(9.5, 4, 4.5 ، ويقع أحد اضلاع المعين BC على المستقيم b [K(8,1,2), M(6,3,2)] والضلع AB يوازي المستوى α $(0,150^0,30^0)$

الحل:

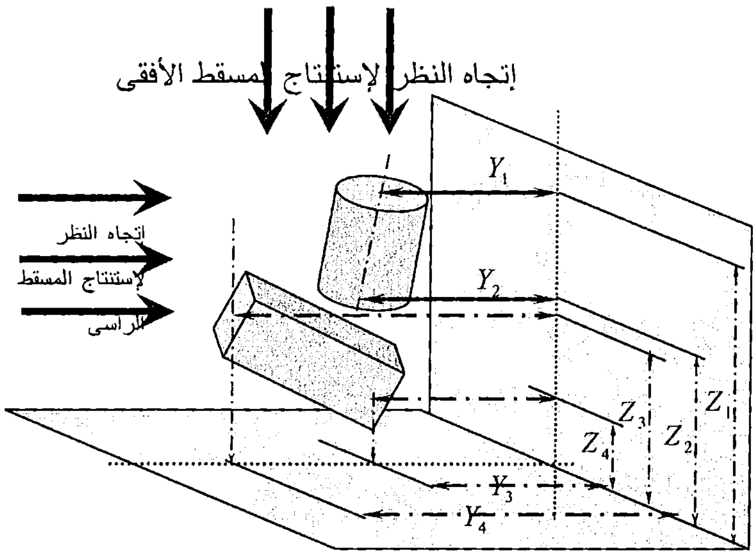


شكل 183

1. من نقطة A نرسم المستوى β يوازى المستوى α ويكون المحل الهندسى للضلع BA لأنه يوازى المستوى α
2. نقطة تقاطع المستوى β مع المستقيم b هى النقطة B شكل 183
3. بقياس الطول الحقيقى للضلع AB على إتجاه الطول الحقيقى للمستقيم b إبتداء من نقطة B نحصل على النقطة C
4. نلاحظ أن المستقيم AB وجهى والمستقيم b أفقى أى أن القياس لأطوال حقيقية على بعضها مباشرة ،شكل 183

تحديد الظاهر والمختفى فى الإسقاط

من الشكل الفراغى 184 نلاحظ وجود جسمين وهما إسطوانة ومنشور ونريد أن نُسقط الجسمين على المستوى الأفقى والرأسى. وعند الإسقاط على المستوى الأفقى وننظر من أعلى لأسفل فى الإتجاه الموضح، نجد أن الإسطوانة هى تظهر أولا للناظر ومعنى هذا أنها صاحبة أعلى قيمة للبعد Z وخاصة Z_1 وهذا الإرتفاع يظهر فى المسقط الرأسى مع أننا نتكلم عن الإسقاط فى المستوى الأفقى. وبالتالى ماتحتها أى صاحب أقل



شكل 184

Z سيظهر بعدها منقط أى جزء من المنشور سيظهر مختفى تحت الإسطوانة فى المسقط الأفقى. وبالتالى نتعلم هذه النتيجة: أننا لكى نعرف الظاهر والمختفى فى الأفقى ننظر على المسقط الرأسى ونرى الأعلى أى أكبر Z فهذا يعنى أنها ظاهرة فى الأفقى والأقل مختفية.

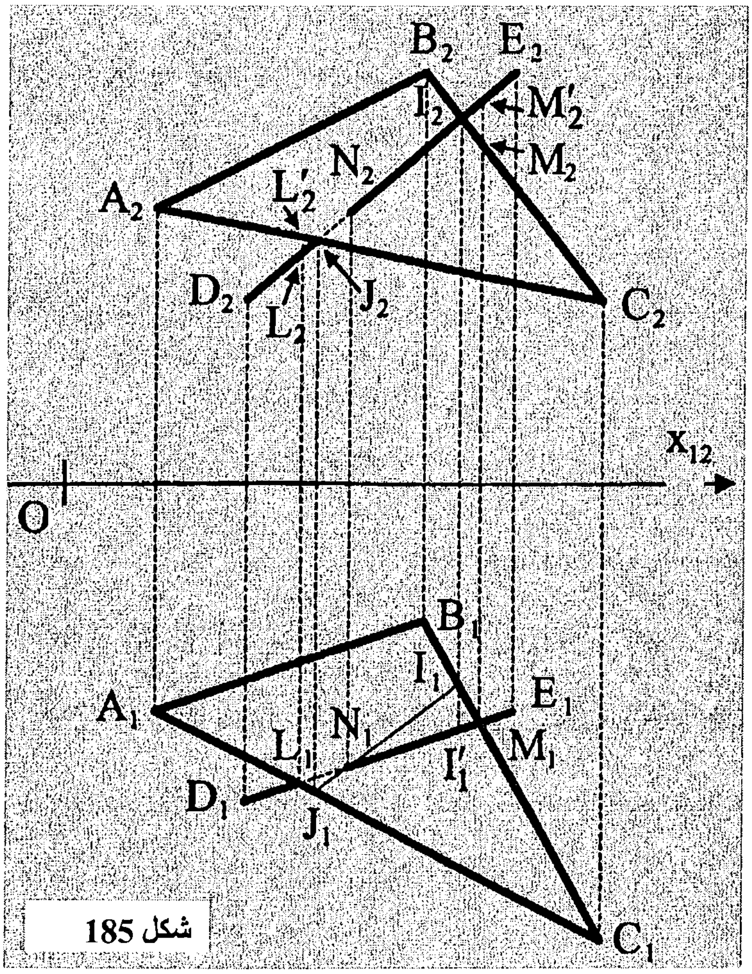
ثانيا: عند الإسقاط على المستوى الرأسى وننظر من الشمال لليمين عمودى على المستوى الرأسى فى الإتجاه الموضح شكل 184، نجد أن المنشور يظهر أولا للناظر ومعنى هذا أنه صاحب أعلى قيمة للبعد Y وخاصة Y_4 وهذا البعد أمام المستوى الرأسى يظهر فى المسقط الأفقى مع أننا نتكلم عن الإسقاط فى المستوى الرأسى. وبالتالى مابعدها أى صاحب أقل Y سيظهر بعدها منقط أى جزء من الإسطوانة سيظهر مختفى تحت المنشور فى المسقط الرأسى. وبالتالى نتعلم هذه النتيجة: أننا لكى نعرف الظاهر والمختفى فى الرأسى ننظر على المسقط الأفقى ونرى أكبر Y فهذا يعنى أنها ظاهرة فى الرأسى والأقل مختفية.

ولقد إبتكرنا هذا الشكل ليوضح للطالب طبيعة إسقاط الأجسام وترتيب الإسقاط وكذلك معرفة الأسباب لظهور بعض الأجزاء من الشكل وإختفاء الأخر. ولم نوضح الإسقاط على المستويات حتى تظهر الفكرة والخطوط واضحة.

عين نقطة تقاطع المستقيم l=DE مع المثلث ABC ثم حدد الظاهر والمختفى حيث: A(1,2.5,3), B(4,1.5,4.5), C(6,5,2), D(2,3.5,2), E(5,2.5,4.5)

الحل:

لتحديد نقطة التقاطع نتبع الإسلوب التقليدى حيث نمرر بالمستقيم مستوى خاص وفى هذه الحالة سنستخدم مستوى عمودى على المستوى الرأسى (خطى المسقط الرأسى) ، فتتحول الحالة لخط تقاطع مستويين ونستنتجه مباشره من على خطى المسقط ثم نوجد مسقطه الأفقى وهو IJ=r ، خط التقاطع IJ مسقطة الافقى يقطع المستقيمDE فى نقطه ، هى نقطة تقاطع المستقيم مع مستوى المثلث وهى N شكل 185.



شكل 185

الظاهر والمختفى

بالنسبة للظاهر والمختفى يظهر ذلك على جزء من المستقيم ، حيث يكون جزء من المستقيم فوق مستوى المثلث والأخر تحت مستوى المثلث وذلك إبتداء من نقطة تقاطعه مع المستوى.. وتحديد الظاهر والمختفى يكون بتحديد جزء المستقيم الذى يعلو مستوى المثلث ويتم ذلك فراغيا كما تم فى شكل 184

ووصفيا يحدد كالأتى: لو أن جزء من المستقيم أمام جزء من المثلث بالنسبة لمن ينظر على المستوى الرأسى فإنه يرى أولا جزء المستقيم فهذا يعنى أن المستقيم أقرب للناظر وأبعد بالنسبه للمستوى الرأسى عن المثلث ، أى أن بعد جـــزء المستقيم فى الإتجاه Y أكبر من بعد جزء من المثلث عن المستوى الرأسى. وكذلك أيضا بالنسبة للمستوى الأفقى ولكن التحديدسيتم على البعد Z .

ولتحديد ذلك وصفيا نأخذ إما الجزء قبل أو بعد نقطة التقاطع ونأخذ معه أحد أضلاع المثلث الذى تقــاطع معــه فى المسقط. ، ويتحدد ذلك فى كل مسقط مستقل عن الأخر.

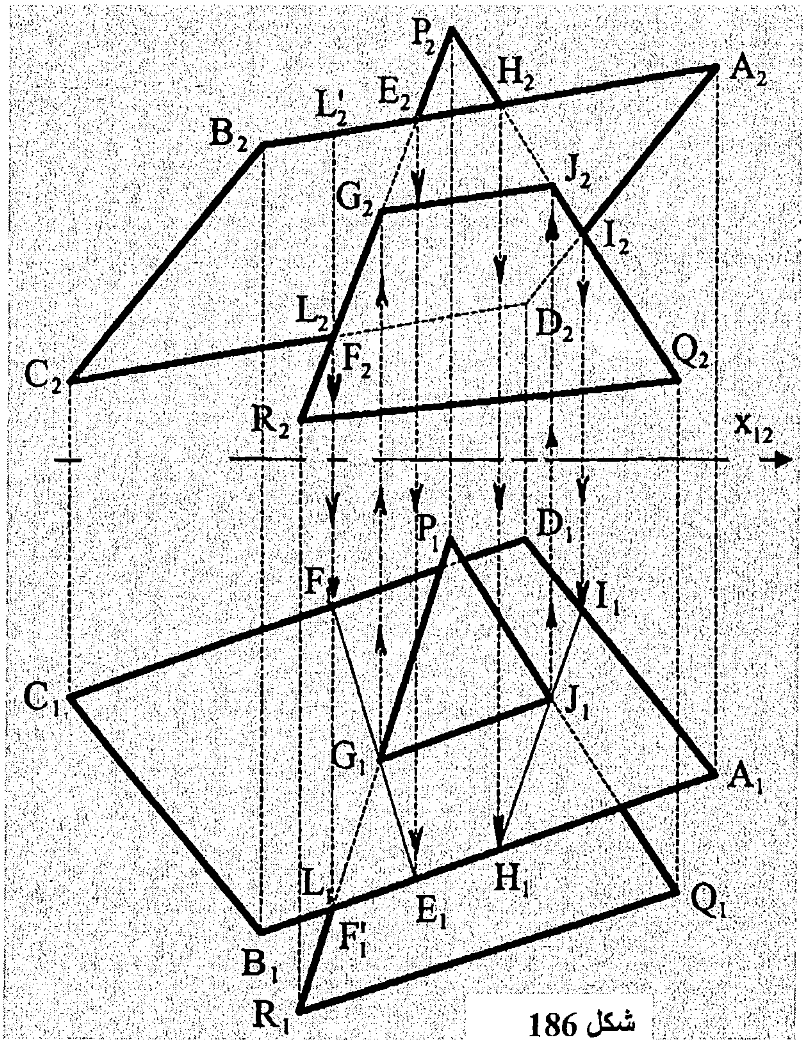
تحديدالظاهر والمختفى فى المسقط الرأسى:

وفى هذا المثال شكل **185** سنأخذ الجزء NE مع المستقيم BC من المثلث فهم متقاطعين رأســيا (شــكلا ولــيس موضوعا) لأنهم شماليين " لذلك يسمى هذا الإسلوب بقاعدة المستقيمين الشماليين" وبالتالى بتحديد نقطة التقاطع هذه فى المسقط الرأسى وهى I_2 نتجه للمسقط الأفقى للنظر وبإيجاد مساقطها الأفقية على كل من N_1E_1وB_1C_1 فنجد I_1' على جزء المستقيم N_1E_1و I_1 على ضلع المثلث B_1C_1 . نلاحظ أن I_1' هو الأبعد وهو صاحب أكبر بعد Y وهذا يعنى أن جزء المستقيم ظاهر فوق ضلع المثلث فى المستوى الرأسى وبالتالى هذا الجزء هو الظاهر فى المسقط الرأسى وعليه يكون نظيره من نقطة التقاطع N إلى نهاية الظهور تحت المثلث مختفى تحت مستوى المثلث وهو الجــزء N_2L_2 . امــا الحدود الخارجيه للمستقيم عن حدود المثلث فهى ظاهرة وذلك بالنسبة الرأسى.

تحديدالظاهر والمختفى فى المسقط الأفقى:

فى شكل **185**يتم تكرار ذلك فى المسقط الأفقى حتى نستطيع تحديد أفقيا الظاهر والمختفى ، ويتم ذلك علــى جــزء المسقط الأفقى N_1D_1مع المسقيم A_1C_1 فنجدهم متقاطعين فى نقطة L_1 ، وبذلك نتجه للمسقط الرأسى لتحديــد أيهما هو الظاهر فى الأفقى فنجد لها مسقطين رأسيين أعلاهما الموجوده على A_2C_2 وبالتالى هو يكون الظاهر فى الأفقى وجزء المستقيم من نقطة التقاطع N_1 الى النقطة L_1 هو المختفى أفقيا.

مثال: عين خط تقاطع المثلث PQR مع متوازى الأضلاع المعلوم ABCD ثم حدد الظاهر والمختفى



شكل 186

الحل:

لتحديـد خـط التقـاطع المسـتويين ،نأخـذ أى مستقيمين من المثلث ونوجد نقطة تقاطع كل مستقيم مع مستوى متوازى الاضـلاع وبالتالى ينتج نقطتين نصلهم معا فيكون خـط التقـاطع شكل 186. ويتم ذلـك لكـل مسـتقيم بإتبـاع الإسلوب التقليدى حيـث نمرر بكل مستقيم مسـتوى خـاص وفى هـذه الحالـة سنستخدم كل من المستقيم PQو PR . نبدأ بالمستقيم PQ حيث نمرر نمرر بالمسقط P_2Q_2 مستوى عمودى على المستوى الرأسى وينتج خط التقاطع HI والذى يقطع مسقط المستقيم PQ فى النقطة J. و بالمستقيم PR حيث نمرر بالمسقط P_2R_2 مستوى عمودى على المستوى الرأسى وينتج خط التقاطع FE والذى يقطع مسقط المستقيم PR فى النقطة G. نصل GJ فيكون خط التقاطع شكل 186.

تحديد الظاهر والمختفى نستعين بقاعدة المستقيمين الشماليين فى كل مسقط على حده.

- فى المسقط الافقى: نجد أن المسقط بداية من نقطة التقاطع G_1R_1 فى المثلث والمسقط للضلع A_1B_1 فى مستوى المتوازى متقاطعين فى نقطة L_1 ولتحديد أفقيا من من G_1R_1 أو A_1B_1 ظاهر والأخر مختفى:

نتجه للمسقط الرأسى ونرى المساقط المناظرة ل L_1 فى المسقط الرأسى مسقطين فى شكل **186** فنجدهما L_2 علـــى G_2R_2 و L_2' على A_2B_2، وبما أن الإحداثى Zللنقطة L_2' أكبر من الإحداثى للنقطة L_2 ، لذلك تكون الضلع الذى تقع عليه L_2' فى المسقط الرأسى وهو A_2B_2 المناظر له فى الأفقى A_1B_1 هو الظاهر ويختفى الأخـــر وهـــو G_1L_1 حيث أنه الجزء الموجود من المستقيم P_1R_1 تحت مستوى المتوازى. ومنه أيضا نعلم أن الجزء $G_1P_1J_1$ هو الظاهر من المثلث فوق مستوى المتوازى شكل **186**.

- فى المسقط الرأسى: نجد أن المسقط بداية من نقطة التقاطع G_2R_2 فى المثلث والمسقط للضلع C_2D_2 فى مستوى المتوازى متقاطعين فى نقطة F_2 ولتحديد رأسيا من من G_2R_2 أو C_2D_2 ظاهر والأخر مختفى:

نتجه للمسقط الأفقى ونرى المساقط المناظرة ل F_2 فى المسقط الأفقى فى شكل **186** فنجدهما F_1 على C_1D_1 و F_1' على G_1R_1 ، وبما أن الإحداثى Yللنقطة F_1' أكبر من الإحداثى للنقطة F_1 ، لذلك تكون الضلع الذى تقع عليه F_1' فى المسقط الأفقى وهو G_1R_1 المناظر له فى الرأسى G_2R_2 هو الظاهر ويختفى الأخـــر وهـــو F_2D_2 حيث أنه الجزء الموجود من المستقيم C_2D_2 تحت مستوى المثلث. ومنه أيضا نعلم أن الجزء $G_2R_2J_2Q_2$ هو الظاهر من المثلث فوق مستوى المتوازى، ونظيره من نقاط التقاطع G_2, J_2 هو المختفى من المثلث تحت المتـــوازى شكل **186**.

تمارين الموضع

1- مثل المستوى الذي يمر بالمستقيم $l = AB$ ويوازي المستقيم $k = CD$ حيث : , $A(-3,2,1)$
. $B(0,1,3.5), C(0,-1,5), D(4,3,2)$

2- مثل المستوى الذي يمر بالنقطة المعلومة $A(-3,-2,-2)$ ويوازي المستوى $\alpha(4,6,6)$.

3- مثل خط تقاطع المستويين α و β في الحالات الاتية .

a) $\alpha(7,7,4)$ و $\beta(1, 150^0, 60^0)$

b) $\alpha(5,5,\infty)$ و $\beta(1, 120^0, 45^0)$

c) α 1افقي (2) α و($\beta(1, 120^0, 45^0)$

d) $\alpha(2, 1350, 30)$ و($\beta(1,3)$ يوازي خط الارض .

4- المعلوم مستوى $\alpha(10, 30^0, 120^0)$ مثل فيه المستقيم m حيث

a) $M[A(4,y,1), B(7,y,3)]$

b) $H(x,7)$ و $V(x,2)$ حيث H , V هما الاثران الافقي والرأسي للمستقيم m .

5- المعلوم مستوى $\alpha(1, 135^0, 30^0)$ مثل فيه مستقيم :

اولا : h افقي فوق π_1 ويبعد عنه مسافة 3 cm .

ثانيا : f وجهي امام π_2 ويبعد عنه مسافة 4 cm .

6- مثل مستوى المثلث A B C حيث $A(3,3,1)$ و $B(7,1,4)$ و $C(8,2,z)$ الذي يقع في مستوى عمودي على π_3 ثم عين اثري هذا المستوى .

7- المعلوم مستوى $\alpha(9, 60^0, 135^0)$ مثل فيه النقطتين $A(6,y,1)$ و $B(7,3,z)$.

8- المعلوم من مستويين الاثران الرأسيان $v\alpha(1,450)$ ونقطة $N(4,1,2)$ حيث :

اولا : $v\beta(10, 135^0)$

ثانيا : $v\beta(3.5, 45^0)$.

ثالثا : $v\beta$ يوازي خط الارض ويرتفع عنه 4 سم .

رابعا : $v\beta(6, 90^0)$.

9- المعلوم من مستويين $h\alpha(0, 135^0)$ و $v\beta(11, 150^0)$ عين $v\alpha$ و $h\beta$ اذا علمت ان :

اولا : نقطة $N(5,4,2)$ نقطة تقع على خط تقاطع المستويين .

ثانيا خط تقاطع المستويين يوازي اتجاه معلوم a حيث a1 و a2 يصنعان على الترتيب 120^0 و 135^0 مع خط الارض.

10 مثل نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى حيث a [(7,1,1) , (3,4,6)] اذا فرض ان :

اولا : $\alpha(1,150^0)$ حيث α رأسي ثانيا : $\alpha(1,135^0,45^0)$.

ثالثا : α عمودي على π_2 حيث $\alpha(4,60^0)$.

11- مثل خط تقاطع المستويين $\alpha(1,150^0,60^0)$ و β [A (11, 2 ,1) , B (8, 7, 5) , C (3, 3, 5)] عن طريق تعيين نقطتي AB و AC مع المستوى α .

12- مثل المثلث ABC والذي يقع في مستوى يوازي المستوى $\alpha (15,30^0,135^0)$ حيث A (7,2,3) B (1,5,z) , C (3,y,8) .

13- مثل القاطع لمستقيمين شماليين p{(1,4,3),(-3,0,5)} ,q{(-3,1,1),(-5,5,3)} ويمر بنقطة N(2.5,2.5,3) .

14- مثل المستقيم الذي يقطع المستقيمان الشماليان AB,CD ويقع في المستوى β(3,2,-5) حيث A(0,2,3),B(3,3,0),C(1,6,5)D(7,4,0) .

15- عين النقطة المشتركة بين الثلاث مستويات .

اولا : $\alpha (12 ,30^0 ,120^0)$ و $\beta (8,5 , 70^0, 150^0)$ و $\gamma (1 ,120^0 ,45^0)$.

ثانيا : $\alpha (7 ,60^0 ,135^0)$ و $\beta (1 , 150^0)$ حيث β رأسي و γ (4 ,5) ويوازي خط الارض .

16 - مثل نقطة تقاطع المستقيم D (1,9,9) و H (1,0.5,6) مع المثلث A(8,7,5) , B (4,2,1) C (2,4,4)

17 - مثل مثلثا متساوي الساقين فيه AB = AC ويقع في المستوى β (6,6,5) بحيث يقع AB في المستوى α (-6,4,6) ويقع AC في المستوى γ (3, -3, 1) علما بأن النقطة B تقع في π_2 .

18 - عين طول القطعة المستقيمة من المستقيم a [(7,5,0) , (-6,1,5)] والمحصورة بين المستويين α (4,4,-3) و β (-4 ,-3 ,4) .

19- مثل المستوى الذي يمر بالنقطة N (1,2,1) ويوازي المستوى α (8,7,6) .

20 - مثل المستطيل الذي يقع قطره BD على المستقيم a وقطره AC يوازي المستوى γ (6,6,6) حيث a [(-4,1,0) , (6,5,4)] و A (-4,4,4) .

الباب السابع

الإسقاط المساعد

الإسقاط المساعد

هذا الباب هو الباب الذى حير كل العاملين فى الهندسة الوصفية والإسقاط عموما وأتعب الكثيرين ممن يستعجلوا الحصول على المعلومة وتقديمها للطلاب بصورة نمطية دون البحث فى ماوراء المعلومه والمفهوم لها حتى يستطيع التفهم الجيد لكل شئ. لذا فإن هذا الباب نشأت فكرته من الأوضاع الخاصة لكل من المستقيمات والمستويات، حيث وجد أن الاجزاء ذات الأوضاع الخاصة هى دائما الأسهل فى التعامل والأوضح وكذلك هى التى تمتلك صفات كثيرة دون غيرها من الأوضاع العامة وبالتالى تسهل دائما التعامل مع الأجزاء الصعبة. ومثل هذه الأوضاع التى يمكن تلخيصها هى كالأتى:

<u>أولا للمستقيم</u>: المستقيم فى الأوضاع الخاصة كلها يظهر بطوله الحقيقى فى بعض مستويات الإسقاط وبالتالى هذا يسهل لنا الأتى ; أولا: قياس الطول الحقيقى عليه مباشرة ; ثانيا: يتم تطبيق عليه نظرية الزاوية القائمة " الزاوية القائمة تُسقط قائمة مادام أحد أضلاعها بطوله الحقيقى" حيث يسهل إستخدام الخصاص الهندسية للأشكال الهندسية فى المستوى والتى تمتلك زوايا قائمة لتحديد مواقع النقاط التى تتضح عند نقاط التعامد ; ثالثا: كل المستقيمات العمودية بالإضافة لأنها تظهر طول حقيقى فى بعض المستويات إلا أنها تظهر نقطة فى أحد المستويات وبالتالى توجد التطبيقات الكثيرة التى تتطلب أن يكون المستقيم واضح أنه نقطة ، مثل تحديد الزاوية الزوجية بين مستويين يكون واضح لو أن خط تقاطع المستويين مسقطه كان نقطة هذا يعنى أن الزاوية تظهر مباشرة، بالإضافة إلى تطبيقات كثيرة تعتمد على الأوضاع الخاصة للمستقيمات.

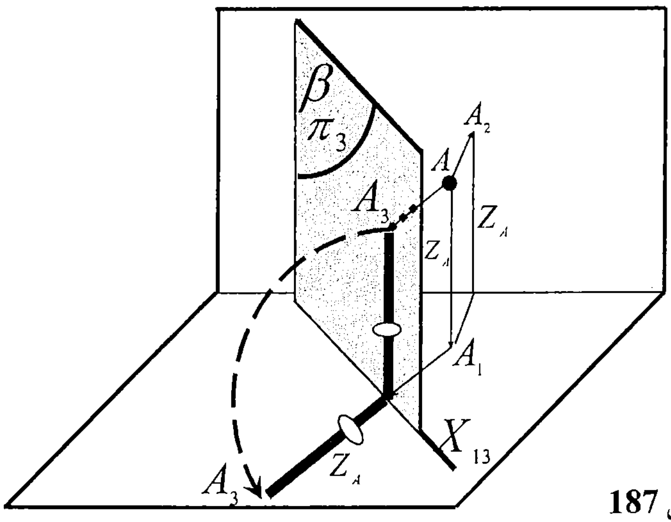
<u>ثانيا المستوى</u>: الأوضاع الخاصة للمستوى تظهر بداية عندما يكون المستوى خطى المسقط أى عمودى على أحد مستويات الإسقاط وهذا يتم الإستفادة منه فى أولا: أنه يمكن رسم موازى له مباشرة من أى مسقط للنقطة فى إتجاه خطى المسقط إعتماد على أنه خطى المسقط، ثانيا: رسم مستقيم يوازى مستوى من أى مسقط للنقطة فى إتجاه خطى المسقط، ثالثا: إيجاد نقطة تقاطع المستوى مع أى مستقيم فى إتجاه خطى المسقط مباشرة، رابع: تحديد ورسم مستوى موازى لمستوى على بعد محدد. أما المستويات التى توازى مستويات الإسقاط فإن الأشكال التى تقع فى هذه المستويات تظهر بشكلها الحقيقى T.S فى مستوى الإسقاط الموازى، وبالتالى تحتفظ بجميع خصائص الهندسة المستوية

من التوازى والتعامد. لذلك نتيجة للتسهيلات التى تقدمها هذه الأوضاع الخاصة لجأ العلماء الذين سبقونا لهذا العلم وكذلك من إجتهدوا من بعدهم أن يحاولو تحويل المستقيمات والمستويات العامة إلى أوضاعها الخاصة حتى يمكن الإستفادة من هذه الأوضاع فى مواجهة التمارين المتعددة الصعبة. ومن هنا أصبح لزاما علينا أن نتعلم كيف يمكن أن نحول مستقيم من وضع عام إلى وضع خاص يظهر بطوله الحقيقى ثم إلى وضع عمودى بحيث يظهر نقطة، وكذلك كيف يمكن تحويل المستوى لوضع خطى المسقط بدلا من الوضع العام ثم كيف نأتى بالشكل الحقيقى للمستوى للسيطرة على تمرين الهندسة الوصفية والتعامل معه على أنه هندسة مستوية. وهذا ماسيتم شرحه فى هذا الباب.

تنبيه: فى هذا الباب سنستخدم مستويات إضافية تكون عمودية أولا على أحد مستويات الإسقاط الأفقية أو الرأسية وفى ذات الوقت لها وضع خاص مع الأجزاء الموجودة من التمارين.

1-الإسقاط المساعد للنقطة

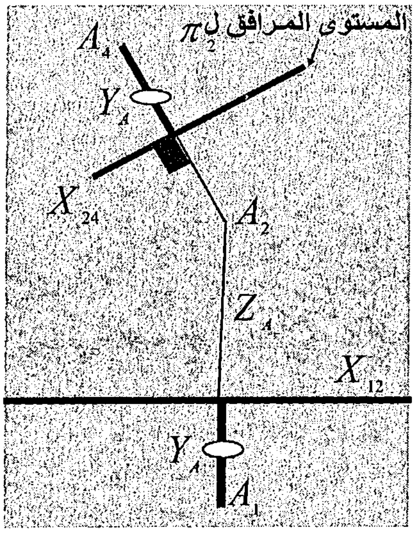
في إسقاط مونج يتم الاستعانة بمستويين أساسين π_2,π_1 للإسقاط المباشر عليهم. ومن عيوب هذا النظام أن الإسقاط عليهم ياتى تبعا للوضعيه



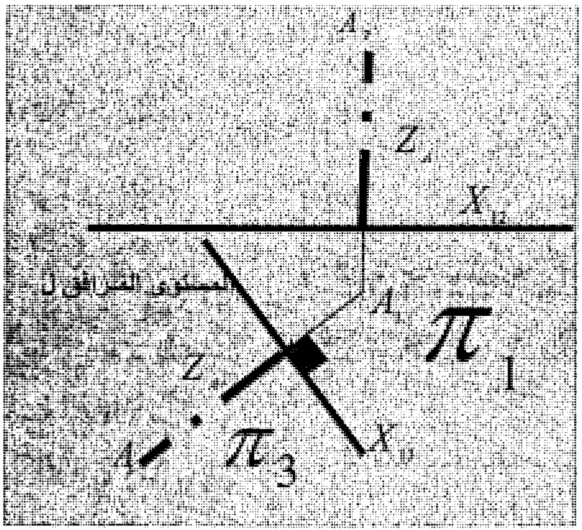
شكل 187

الفراغيه للمستقيم أو المستوى الذى يتم إسقاطه (مائلا على الأفقى او الرأسى او باى وضع غير التوازى او التعامد بالنسبه للمستويات الرئيسيه π_2,π_1) .ونتيجه للخواص العديده للأوضاع الخاصه للمستقيمات والمستويات وسهوله التعامل معها ومميزاتها العديده فقد جاءت فكره الإسقاط المساعد الذى يستطيع تحويل كل من المستقيمات والمستويات من الأوضاع العامه لأوضاع خاصه. يتم ذلك من خلال الإستغناء عن أي من المستويين π_1 و π_2 وإستخدام الأخر واستبدال المستوى الذى تم الإستغناء عنه بمستوى أخر عمودي على الأخر (شكل 187) ولكن له وضع خاص يحدد

من خلال الشكل المراد إسقاطه والتعامل معه مثل وضع المستوى β بالنسبة للمستقيم حيث تم الإستغناء عن المستوى الرأسي وإستخدام مستوى عمودى على المستوى الأفقى شكل **187**. وبإحداث عملية الإنطباق تظهر الصورة حسب وضع المستوى و الغرض منه . وعندما نستغني عن π_2 . ونأخذ مستوى أخر عمودي علـــى π_1 كمســـتوى ثالـــث



شكل **189**



شكل **188**

$\beta=\pi_3$ فإنه يتقاطع معه في خط أرض جديد يكون بين المستويين**3,1**.

بالتالي خط الأرض يكون إسمه الجديد X_{13} شكل **187** وشكل **188** ويعتبر بهذا الشكل المستوى π_3 الجديـــد مستوى خطى المسقط على π_1 لأنه عمودى عليه. كذلك لو تم إستخدام مستوى عمودي على π_2 يكون خط الأرض بين المستوى **2** و المستوى **4** الجديد هو X_{24} شكل **189**. ومن شكل **188**عند إنطباق المستوى β علـــى π_1 يتضح أن بعد A_3 عن X_{13} هو نفسة بعد A_2 عن X_{12} وهو Z_A وهذه القاعدة سيتم تطبيقها عامة وهى كالأتى:

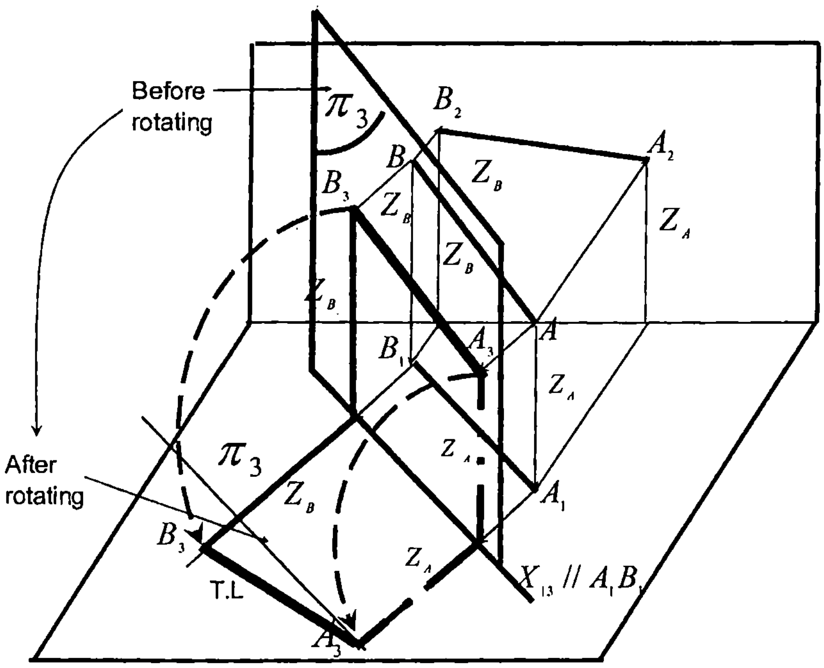
<u>نتيجة1</u>. * <u>بعد المسقط المتروك عن خط الأرض المتروك يساوى بعد المسقط الجديد عن خط الأرض الجديد . أو</u>

<u>* بعد المسقط القديم عن خط الأرض القديم يساوى بعد المسقط الجديد عن خط الأرض الجديد .</u>

يجب أن نعلم أن المستوى 3 العمودى على π_1 معرف بأنه المستوى المرافق إلى π_1 شكل **188** ويسمى المستوى 4 العمودى على π_2 بأنه المستوى المرافق إلى π_2 شكل **189**. ويمكن إحداث تتالي للمستويات المساعدة المفروضة X_{13} , X_{35} , X_{57} كلهم عمودين على π_1 ولكن بأوضاع مختلفة تخدم الغرض من وضعها وكذلك X_{24} , X_{46}, X_{68} بالنسبة إلى π_2 . وتستخدم الأرقام الفرديه للمستويات المرافقه ل π_1 و π_3 و π_5 بالتتالى وكذلك الأرقام الزوجية للمستويات المرافقه للمستويات π_2 و π_4 و π_6 بالتتالى. والأن إعتماد على الأفكار الموضحه سابقا فإنه سيتم التعامل مع المستقيمات والمستويات ذات الأوضاع العامه لتحويلها لمستقيمات ومستويات ذات وضع خاص لتسهيل حل التمارين.

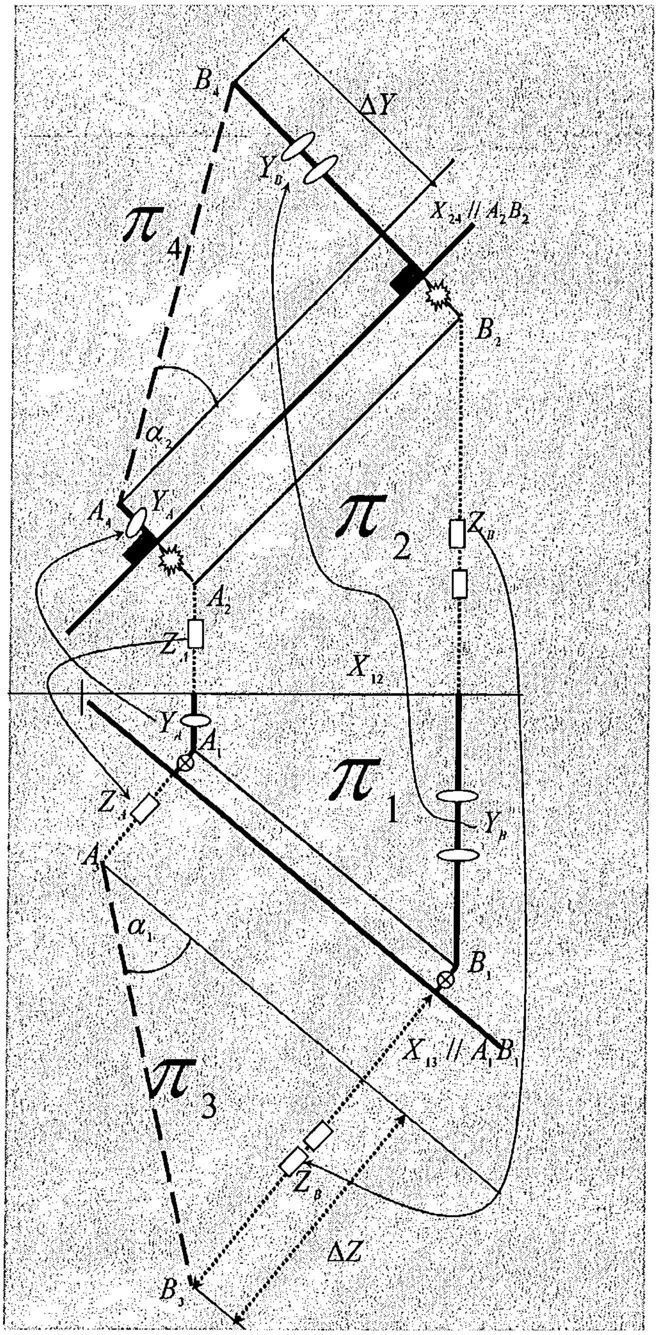
الإسقاط المساعد للمستقيم

1. إيجاد الطول الحقيقي للمستقيم/ تحويل المستقيم من وضع عام إلى وضع موازى لمستوى المسقط (أفقى أو وجهى)



شكل **190**

الأوضاع التى ظهرت فى الأشكال السابقة توضح طبيعة الأبعاد التى تنقل عند عمل الإسقاط المساعد وذلك بإستخدام المستويات العمودية. ونتيجة لسهولة التعامل مع المستقيمات الخاصة الأفقية والوجهية فإنه جاءت الفكرة فى كيفية تحويل مستقيم من وضع عام إلى مستقيم أفقى أو وجهى. ومن شكل **190** نلاحظ أنة لو تم



شكل **191**

إستخدام مستوى مساعد موازى للمستقم عمودى على مستوى الإسقاط π_1 فإن المستقيم لو تم إسقاطة علية فإنة سيسقط علية بطولة الحقيقى شكل **190** يوضح رسم المستوى π_3 الجديد موازى للمستقيم وبذلك يتم إسقاط AB علية بأرقام جديدة وهى Z_A , Z_B وبالأبعاد A_3B_3 وهى نفس الأبعاد لكل من A_2 , B_2 فوق X_{12}. المستوى π_3 يتقاطع مع π_1 فى خط أرض جديد هو X_{13} ونلاحظ أن خط الأرض الجديد X_{13} يوازى المسقط الأفقىللمستقيم AB حيث يوازى A_1 , B_1. وبدوران المستوى π_3 لينطبق على المستوى الأفقى π_1 نلاحظ أن خطوط التناظر بين A_1 , A_3 وبين B_1 , B_3 هى عمودية على X_{13} وبذلك التعامل مع خط الأرض X_{13} يكون مثل التعامل X_{12} حيث أن خطوط التناظر تكون عمودية على كل منهما.

شكل **191** يوضح كيفية إستخدام الإسقاط المساعد كأسلوب لإيجاد الطول الحقيقى سواء على ويتم الإسقاط من A_1 , B_1 خطوط تناظر عمودية على X_{13} ونأخذ الأبعاد فوق X_{12} وهى Z_A , Z_B لكل من A_2 , B_2 وهى

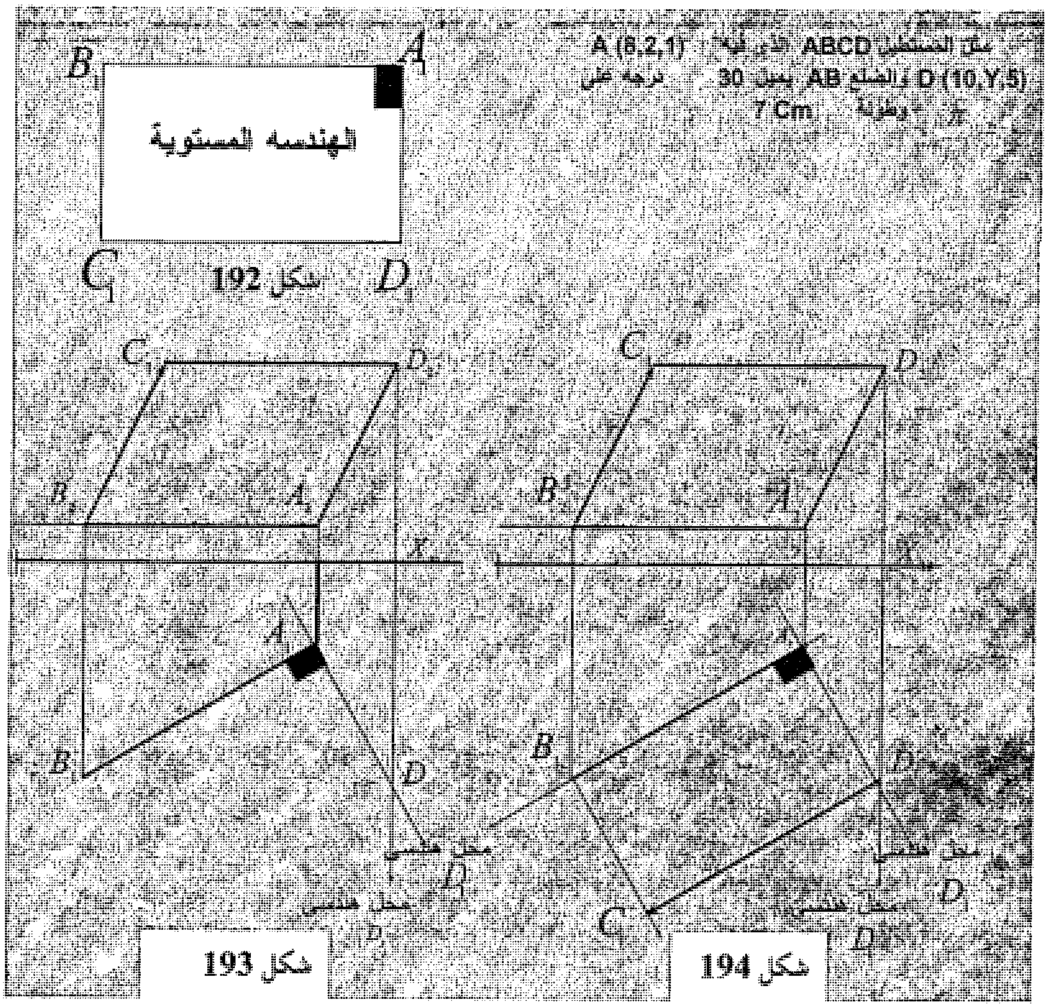
ونقيسها على خطوط التناظر العمودية إبتداء من X_{13} وذلك لإستنتاج كل من A_3B_3 وبالتالى يمكن القول بأن الأبعاد فوق X_{12} يتم نقلها تحت X_{13} فيكون المسقط فى π_3 طول حقيقى شكل 191. بالنسبة إلى π_2 سيتم رسم $A_2B_2 \,//\, X_{24}$ ويتم الإسقاط من A_2, B_2 خطوط تناظر عمودية على X_{24} ونأخذ الأبعاد تحت X_{12} وهى Y_A, Y_B لكل من A_1, B_1 ونقيسها على خطوط التناظر العمودية إبتداء من X_{24} وذلك لإستنتاج كل من A_4B_4 وبالتالى يمكن القول بأن الأبعاد تحت X_{12} يتم نقلها فوق X_{24} ويكون المسقط فى π_2 طول حقيقى.وفى كلتا الحالتين يتضح كيفية وحدود إنطباق كل من π_3 و π_4 شكل 191. ونلاحظ أنه تحول المستقيم في هذه الحالة إلى مستقيم أفقي يظهر بطول الحقيقي وكذلك زاوية ميلة على المستوى الأفقي α_1 وكذلك بالنسبة لـ π_2 فنوجد α_2.

نتيجة 2. الزاوية القائمة تسقط قائمة طالما كان أحد أضلاعها يظهر بطولة الحقيقى T.L (طالما موازى لمستوى المسقط) والعمودى على ال T.L ليس T.L " مادام الإسقاط ليس لشكل حقيقى".

لذلك إذا كان الحل فى الهندسة المستوية يستلزم عمل عمود واحد على أحد المستقيمات أو إسقاط عمود من نقطة على مستقيم فإن هذا يقودنا إلىجعل هذا المستقيم يظهر فى وضع T.L حتى يمكن إقامة العمود علية وهذا يعنى إستخدام خط أرض موازى لأحد مساقطه الأفقية أو الرأسية ويجب أن لاننسى أن العمود الذى يتم عملة طولة ليس T.L وإن كان مطلوب طول هذا العمودى ليتم إستخدامة بعد ذلك فى تطبيق أخر فإننا لابد أن نأتى بالطول الحقيقى لهذا العمود كمستقيم منفصل ثم إستخدامه فى القياس للطول بعد ذلك تبعا للغرض المطلوب منه.

والإستفادة من إيجاد الطول الحقيقى للمستقيم تتلخص فى إيجاد زوايا الميل للمستقيم على المستويات الأساسية π_1, π_2 وإتاحة إقامة المستقيمات العمودية على المستقيمات . كالمثال التالى:

تطبيقات تحويل المستقيم إلى الطول الحقيقى ذات إستخدامات متعددة، وإليك هذا المثال:

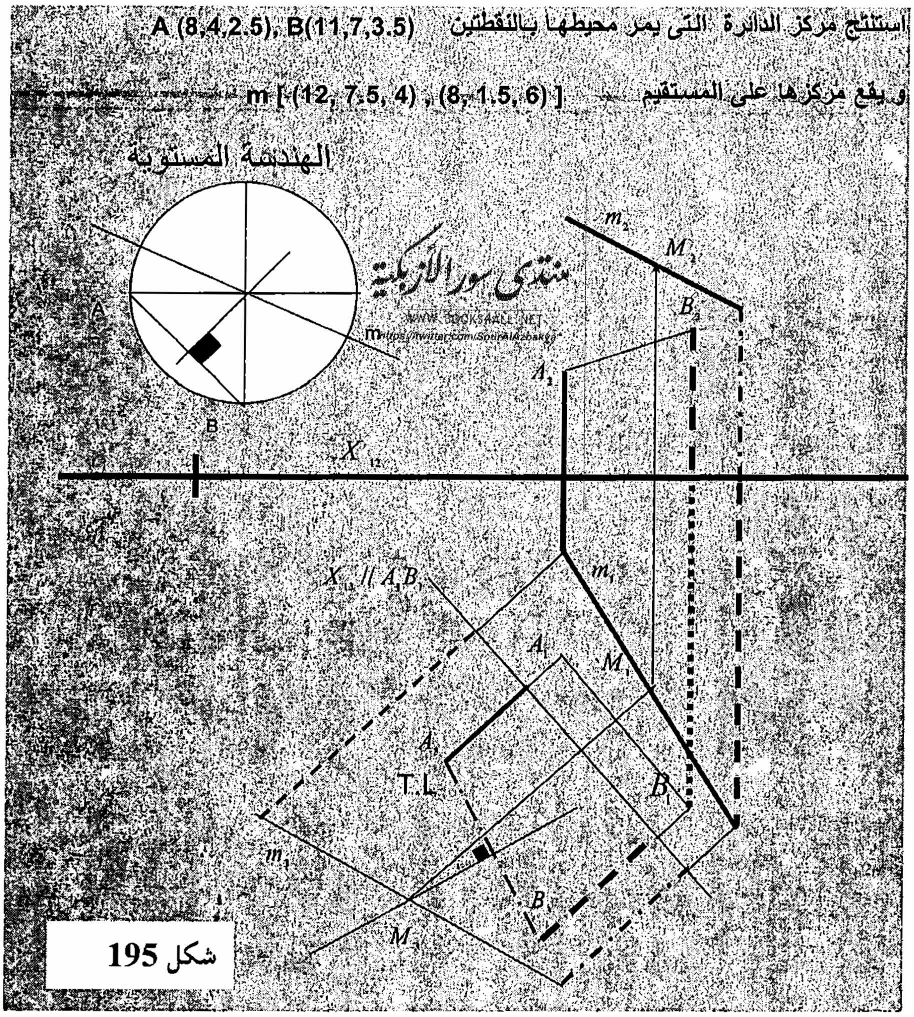


شكل 192

شكل 193

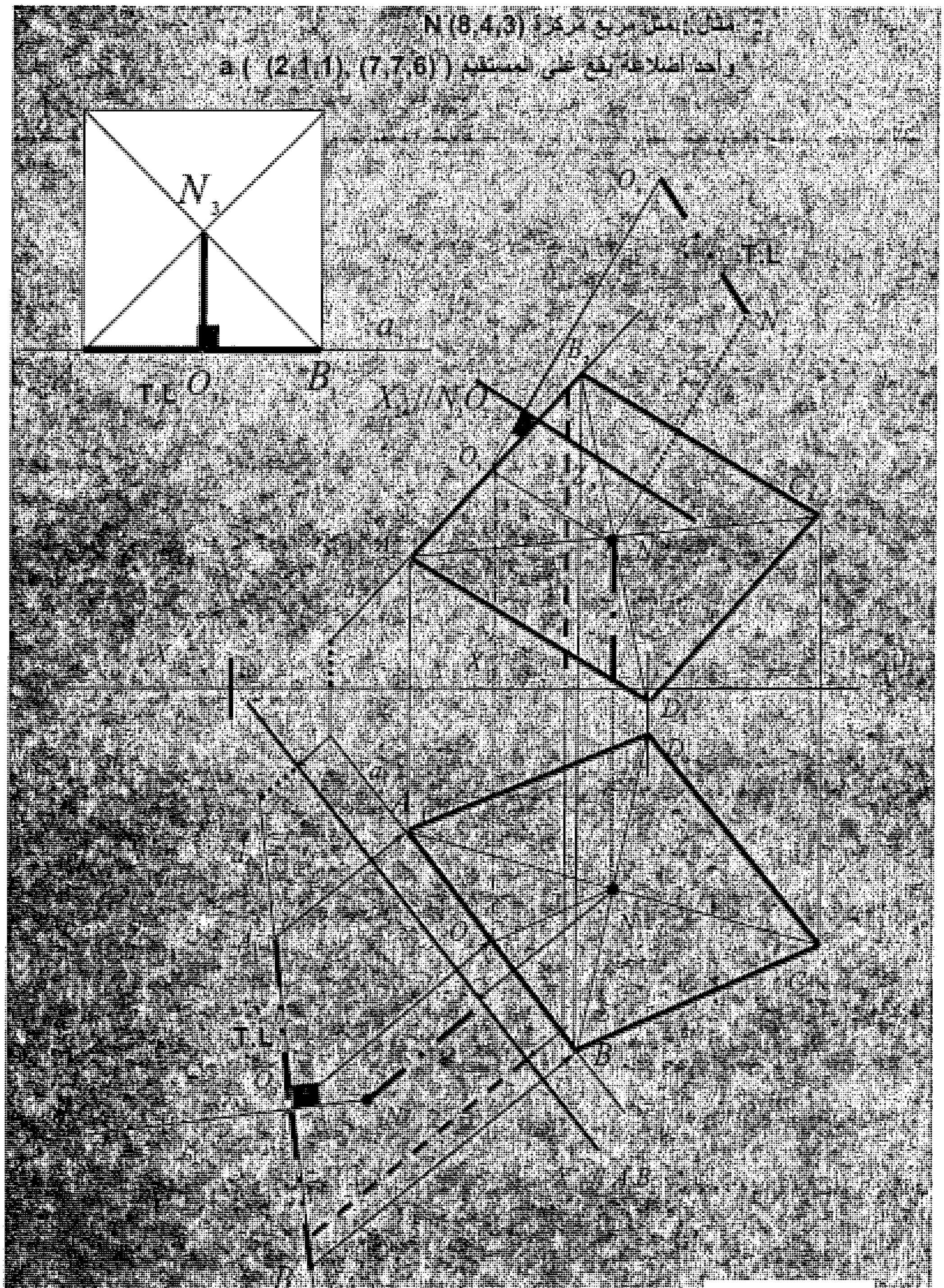
شكل 194

نجد من المعطيات فإن المسقط الرأسى كامل بالنسبة للمستطيل ولكن المسقط الأفقى ناقص شكل **193**، ومن الحل بالهندسه المستويه شكل **192** نجد أن المعطى هو الضلع **AB** وناقص الإحداثى للنقطة **D** ومن خصائص المستطيل أن الضلع **AB**عمودى على **AD** وهذا يعنى أننا سنقيم عمودى على **AB** فيكون محل هندسى للضلع **AD** وهذا متاح فى الهندسه المستوية ولكن لتنفيزة فى الهندسة الوصفية لابد أن يكون الضلع **AB** فى حالة **T.L** ومن حسن الحظ أنه **T.L** لأنه أفقى شكل **194** وبالتالى يمكن عمل عمودى عليه مباشرة فى المسقط الأفقى فيكون هذا العمودى محل هندسى للنقطة **D** يتقاطع مع المحل الرأسى فى المسقط الأفقى لنقطة **D**.



شكل 195

مثال: فى شكل 195 معطــــى وتر فى الــدائرة ومحل هندســى للمركز وهــذا يعنى فى الهندسة المســتوية أنــه سنقيم عمود من منتصف الــوتر يتقاطع مع المحل الهندسى للمركز فى المركــــز . ولتنفيذ ذلــك بالهندسة الوصفية يتم الذهاب إلى الثلاثات بكل التمرين أى بجميع المعطيات ويتحول الوتر حينئذ إلى T.L فنحصل على A_3B_3 وإقامة عمود علية يتقاطع مع m_3 فى المركز M_3 والعودة بة لإستنتاج M_1 ثم M_2 بالعودة عموديا على خطوط الأرض بخطوط التناظر. بنفس الفكرة يمكن رسم مثلث متساوى الساقين معلوم قاعدتة ورأسة تقع على مستقيم مثل m.



شكل 196

شكل **196** يوضح حل التمرين بالهندسة المستوية الذى أنصح دائما بالبداية به حيث نحصل على الحل المبدئى بالهندسة المستوية ثم نترجم خطوات الحل بما يتفق معة فى الهندسة الوصفية. ومن هذا المثال يمكن أن نتعلم كيف نفكر. المعطى فى

هذا المثال هو مركز المربع ومحل هندسى لأحد أضلاعة، وبالتالى لإكمال الشكل بالهندسة المستوية يتم إسقاط عمود من مركز المربع على المستقيم **a** نحصل على نقطة منتصف الضلع **O** ومنها نقيس طول هذا العمود يمين وشمال **O** نحصل على نقطة **A , B** ثم نصل **AN** ونمدة ثم نقيس مثلة نحصل على**C** ثم نصل **BN** ونقيس مثلة نحصل على**D** . من هذا الحل نجد أولا لتحويل هذا الفكر للهندسه الوصفية نتابع تنفيذ الخطات وصفيا:

أولا: لإسقاط عمود من **N** على **a** لابد أن يكون **a** بطولة الحقيقى ، بناء على ذلك لابد أن نحول المستقيم **a** إلى **T.L** وهذا لن يتم إلا فى الثلاثات أى يتم عمل $X_{13} // a_1$ ومعة كل المعطيات وهى N_1 و a_1 وبالتالى نحصل على a_3 و N_3 وفى هذا الوقت يمكن عمل عمود من N_3 على a_3 لأنة أصبح **T.L** (نصيحه عامه: عندما نحصل على أى نقطة فى الثلاثات π_3 لابد أن نعود بها مباشرة إلى π_1 و π_2)

ثانيا: فى الهندسة المستوية يمكن أن نقيس طول العمودى مباشرة على الضلع **a** ولكن فى الهندسة الوصفية لايجوز حيث أنة لايتم قياس طول عادى على طول حقيقي وبالتالى المطلوب إيجاد الطول الحقيقى لهذا العمودى ثم العودة به لقياسه على الطول الحقيقى للمستقيم a_3 .(الطول الحقيقى لهذا العمودى يمكن إيجاده بطريقة فرق البعد للضلع ON أو بإستخدام الإسقاط المساعد بخط أرض جديد X_{35} موازى إلى O_3N_3 أو بخط أرض X_{15} موازى إلى O_1N_1 أو X_{24} موازى إلى O_2N_2 كل هذا يؤدى إلى إيجاد الطول الحقيقى للعمودى).

ثالثا: عند قياس الطول الحقيقى يمين وشمال O_3 نحصل على A_3 , B_3 ثم نعود بهم ونكمل الشكل كما سبق الذكر فى الحل بالهندسة المستويه حتى نحصل على شكل دقيق وأضلاع متوازية.

تحويل المستقيم إلى نقطة

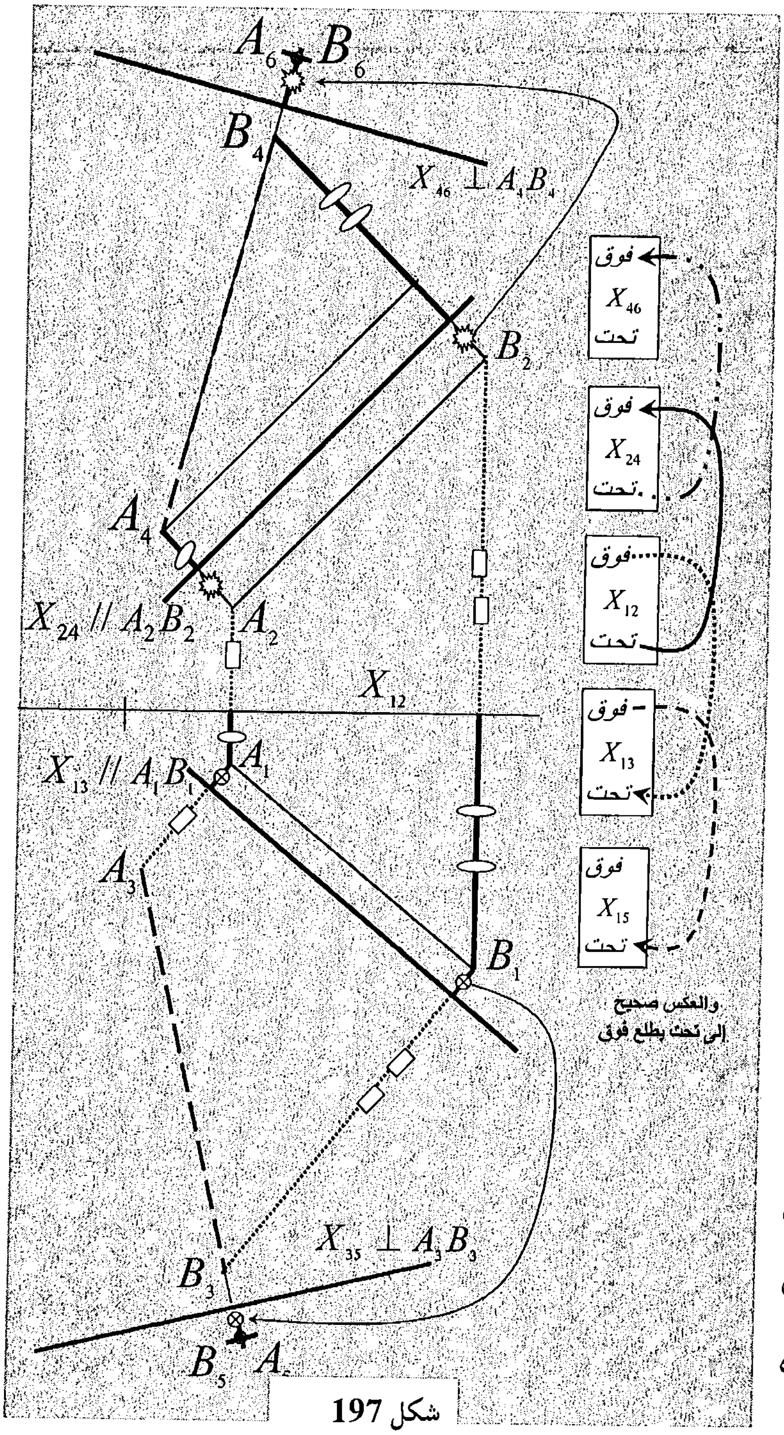
تحويل مستقيم إلى نقطه هو تحويل مستقيم من وضع عام إلى وضع عمودى على مستوى المسقط شكل **197**.

وفى السابق تم إستخدام مستوى موازى لمسقط المستقيم لنحصل على الطول الحقيقي فإذا تم إسقاطه على مستوى عمودى على ال**T.L** X_{35} فيتحول المستقيم إلى نقطة . وكذلك لا يمكن إسقاط على مستوى عمودى على π_2

إلا إذا تحول المستقيم إلى طولة الحقيقي بإستخدام α_{24} الموازى للمسقط الرأسى ثم إستخدام خـــط أرض عمـــودى

X_{46} فيتحول لنقطة شكل 197.

ملاحظه: بالنسبه للمستقيمات ذات الأوضـــاع الخاصـــة .(المستقيم الأفقي والوجهي وكل مـــاهو بطولـــة الحقيقـــى فى مسقطه الأفقى أو الرأســـى) يسقط مرة واحدة عمودى .



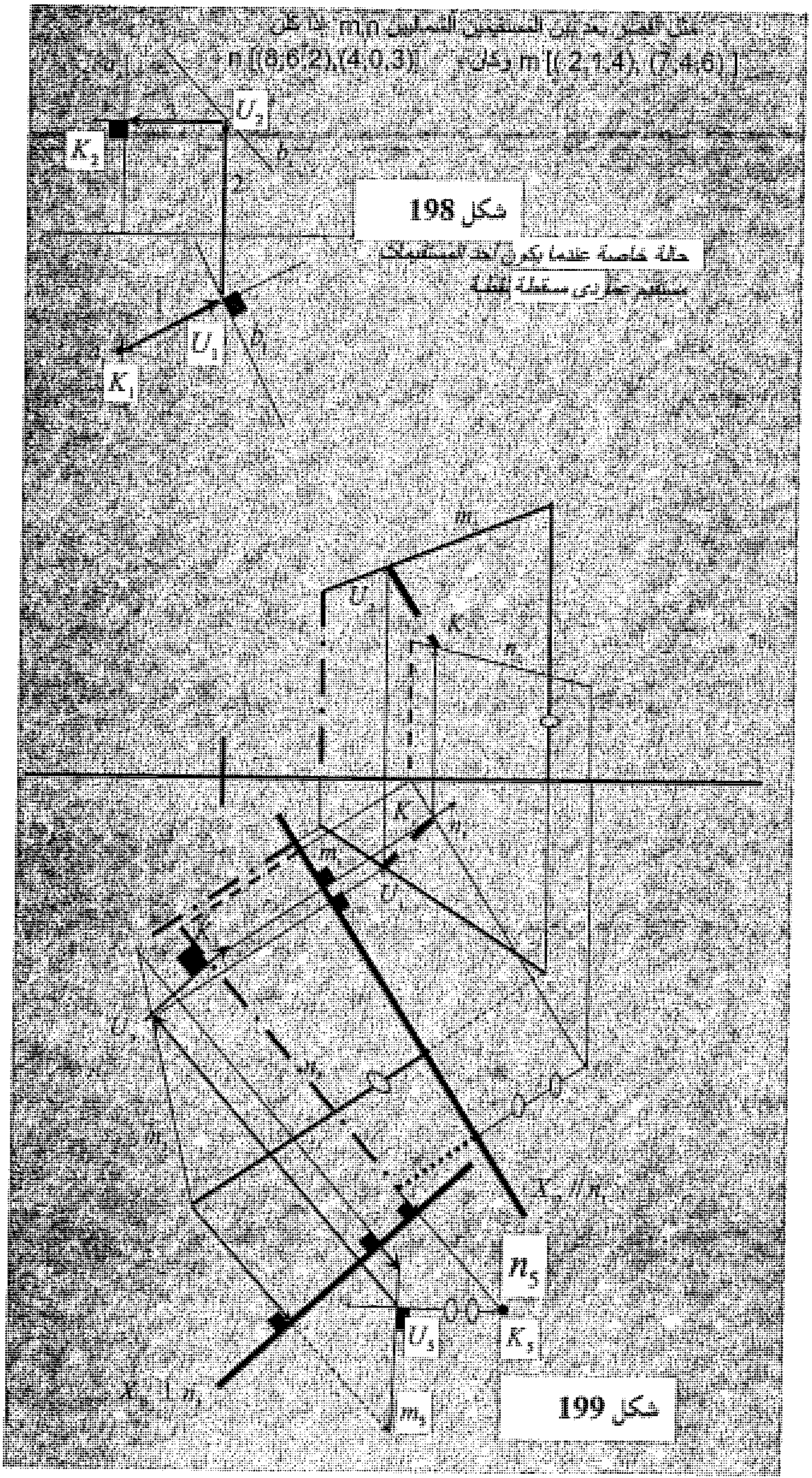
شكل 197

أسلوب نقل الأبعاد للنقـــاط وعلاقتها لخطـــوط الأرض ، ونلاحظ من شـــكل 197 فى وضع خطـــوط الأرض فـــوق بعض، وليسهل التعامل معهـــا فى نقل وقياس أبعاد المســـاقط للنقاط بالنسبة لخطوط الأرض تحت X_{12} نطبق " إلى فوق يترل تحت" كما نرى فى إتجاه الأسهم من X_{12} إلى X_{13} ثم إلى X_{35} .أما فى العودة بعد إجراء العمليات الهندسية وإستنتاج المطلوب فى X_{35} نعود بعكس الطريق وهو "إلى تحت

يطلع فوق" حيث يكون ما تحت X_{35} يصعد فوق X_{13} وما تحت X_{13} يصعد فوق X_{12} . أما بالنسبة لخطوط الأرض فوق X_{12} وهى X_{24}و X_{46} فإننا نطبق عكس الإسلوب السابق تماما، حيث نطبق "إلى تحت يطلع فوق" عند الذهاب إلى خطوط الأرض الأعلى، أما عند العودة بعد إستنتاج المطلوب نطبق " إلى فوق ينزل تحت".

الإستفادة من تحويل المستقيم إلى نقطة تتلخص فى:

1. بعد نقطة عن مستقيم
2. إيجاد وتحديد الأبعاد بين المستقيمات المتوازية
3. تحديد موضع مستقيم يبعد عن الموازى له بمسافة محددة
4. البعد العمودى المشترك بين مستقيمين شماليين
5. رسم قاطع لمستقيمين شماليين ويوازى إتجاه محدد.
6. إيجاد الزاوية الزوجية بين مستويين متقاطعين



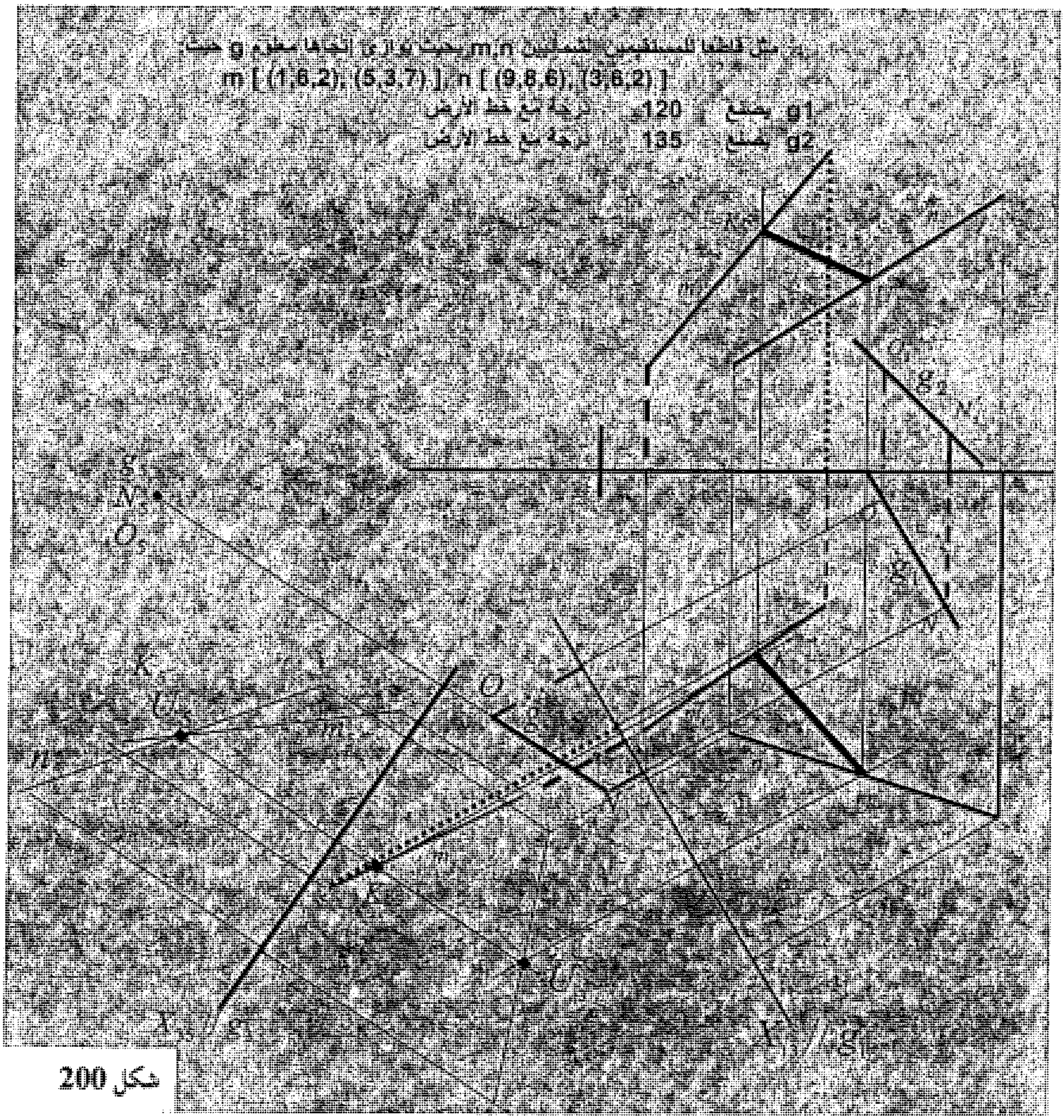
شكل 198

شكل 199

من الحالة الخاصة شكل **198** نجد أنه لو كان المستقيم a رأسى عمودى على π_1 فإن مسقطه الأفقى نقطة ومسقطه الرأسى .T.L. وبالتالى العمودى علىهذا المستقيم الرأسى a هو مستقيم أفقى يوازى π_1 وعلية فإن مسقطه الرأسى يوازى خط الأرض ويظهر فى الأفقى T.L وبذلك يمكن رسم عمودى بين المسقطين a_1,b_1 المستقيمين، هـذه المـرة يكون التعامل بين π_1,π_2 حيث يتم رسم من المسقط الأفقى a_1 عمودى على b_1 حيث b_1 ليس T.L ولكـن العمودى الذى سيتم رسمة هذة المرة هو الذى يكون طولة T.L لأنة عمودى على a_2 وهو مسـتقيم أفقـى T.L وبالتالى هذا العمودى سيقطع b_1 فى نقطة U_1 ويمكن أن نأتى بالتناظر بالمسقط U_2 ومنة نرسم موازى لخـط الأرض الذى نعمل عليه أو نرسم عمودى على المسقط الرأسى a_2 فيقطع العمودى فى K_2 وبالتالى يصبح العمودى U_2K_2 ونوجد مساقطة U_1K_1, U_2K_2 شكل **198**. وبذلك يكون ملخص الحل فى ثلاثة أعمدة من مسـقط المسـتقيم الأول وهو نقطة نرسم عمودى على المسقط للمستقيم الأخر يقطعة فى نقطة منها نرسم عمودى على خط الأرض حتى يقطعه المسقط الأخر لنفس المستقيم نوجد مسقط نقطة التقاطع بالتناظر ومنها نرسم عمودى علـى المسـقط الثـانى للمستقيم الأول فنوجد نقطة على المستقيم الأخر ويكون المحصورة بين نقطتى التقاطع هو أحد مساقط العمودى ونعود به شكل **198**. والسؤال الأن هو: هذا الحل المطروح تم تنفيذة عندما كان أحد المستقيمات مسقطه نقطة. إذا عندما يعطينا مستقيمين فى وضع عام شكل **199**يتم تحويل أحدهما إلى نقطة وإسقاط الأعمدة كما تم فى الحالة الخاصة ولكن هذه المرة يكون التعامل بين π_3,π_5 وإستنتاج الأعمدة والعودة بها كما حدث فى الحالة الخاصة حتى نعـرف كيفيـة العودة بالعمودى شكل **199** حيث أنه يكون موازى لخط الأرض الذى يعمل عليه.

مثال: قاطع لمستقيمين شماليين ويوازى إتجاه معلوم.

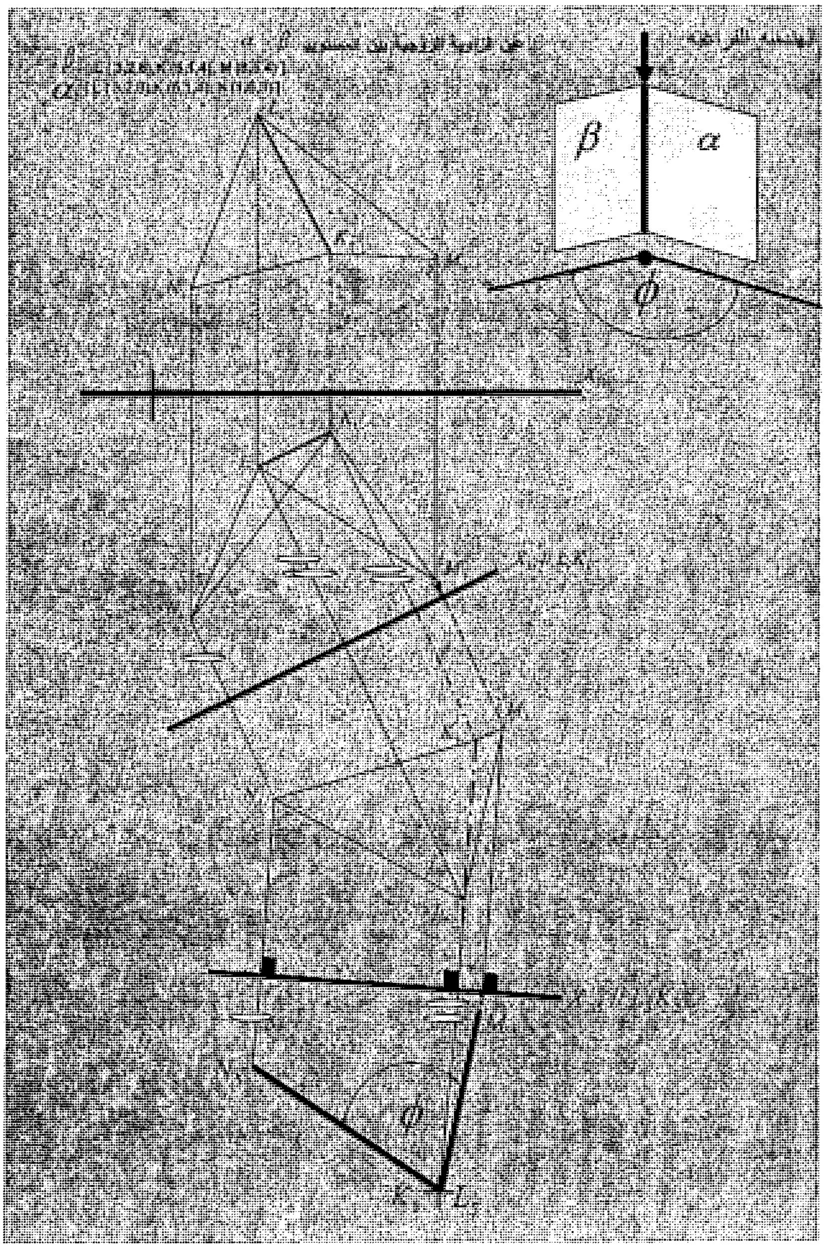
وفى مثل هذة الحالات شكل 200 يتم فيها تحويل الإتجاة إلى نقطة عندئذ يتقاطع مسقطى المستقيمين مع بعض فى نقطة، هذه النقطة هى مسقط القاطع وهى K_5U_5 الذى يوازى الإتجاة الذى يسقط هو الأخر نقطة فى نفس الإتجاه $N_5O_5=g_5$، نعود بهذة النقطة الناتجة على مساقط المستقيمين مباشرة فيكون K_3,U_3 هو القاطع حيث يظهر طولـــة الحقيقى فى الثلاثات.



شكل 200

الزاوية الزوجية بين مستويين (الطريقة الأولي)

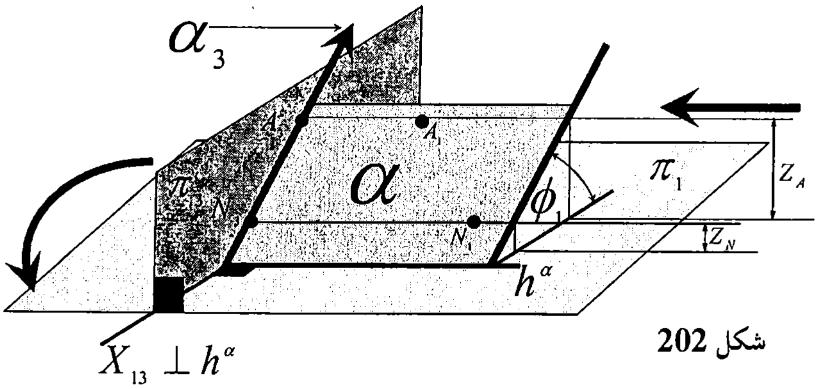
وكأحد التطبيقات لتحويل المستقيم إلى نقطة هو الزاوية الزوجية بين المستويين .ولفهم هذة الحالة يمكن النظر فى إتجاة السهم شكل **201** نجد أن الزاوية الزوجية بين مستويين عموديين على الأفقي هى الزاوية المحصورة بين المستويين وتظهر عندما يكون خط التقاطع للمستويين مسقطه عبارة عن مستقيم رأسى مسقطه الأفقي هى نقطة وهو رأس الزاوية (الشكل الفراغى).لذلك لتعين الزاوية المحصورة بين مستويين نحول خط تقاطع المستويين إلى الوضع العمودى على مستوى إضافي أى مسقطه يكون نقطة فيظهر كل من المستويين *خطى المسقط* متلاقين في نقطة . تكون الزاوية بين خطى المسقط هى الزاوية الزوجيه شكل**201**.



شكل **201**

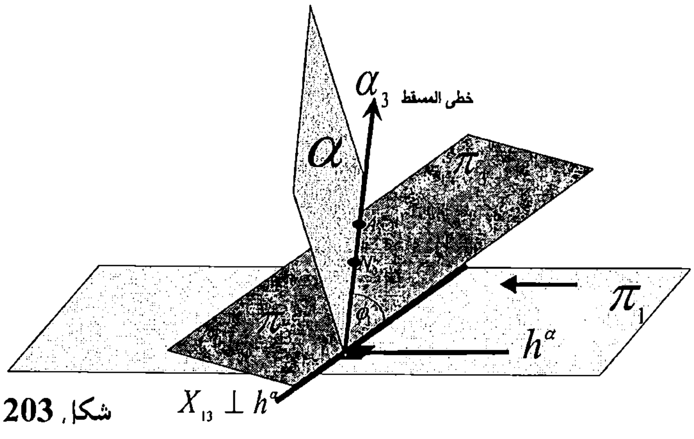
تحويل المستوى إلى مستوى خطى المسقط / تحويل المستوى من وضع عام الي مستوى عمودى

شكل 202 يوضح المستوى α المتقاطع مع المستوى الأفقى π_1 فى h^α، وكذلك المستوى π_3 العمودى علـــى المستوى الأفقى وأيضا عمودى على المستوى α وبالتالى فهو عمــــودى علــــى خــــط تقاطعهما h^α، وكذلك يكون خط تقاطع المستوى π_3 مــع المستوى الأفقى π_1 هو خــط



شكل 202

أرض جديد X_{13} وعمودى على الأثر الأفقى h^α شكل 202 . ومن ذلك نكون علمنا أنه يمكن تمريـــر خـــط أرض جديد يسمى X_{13} عمودى على h^α ويعبر حينئذ عن أنه تم إستخدام مستوى إضاف عمودى على المستوى الأفقـــى. ومن شكل 202 نلاحظ أن المستوى π_3 يقوم بعد بالإلتصاق فى المستوى α عن طريق الأثر للمستوى α على المستوى π_3 وهو مايسمى α_3 ونلاحظ أننا لو نظرنا فى إتجاه السهم من اليمين ← سيكون مسقط المستوى α على المستوى π_3 هو خطى وهو α_3، وكذلك مسقط النقطة $\mathbf{A_1}$ و $\mathbf{N_1}$ يكونا على α_3 وعلى نفس الإرتفاع $\mathbf{Z}$ عن المستوى π_1 وتتضح الزاويـــة الأصـــلية لميـــل المستوى α على المستوى الأفقـــى وهى ϕ_1 بين كل مـــن X_{13} و α_3 . وكل ذلك لتوضيحه يتم دوران المســـتوى π_3 عكـــس عقـــارب الساعة حتى ينطبق على المســـتوى



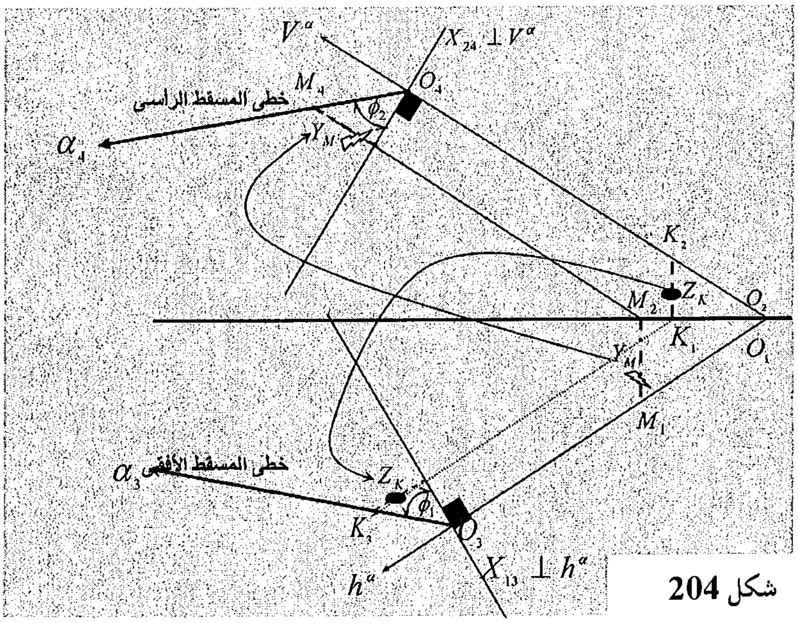
شكل 203

الأفقى وهو ملتصق فى α . ومن ذلك يتنج شكل 203 الذى يوضح أن شمال خط الأرض الجديد X_{13} أصبحالمستوى

π_3 وكأنه أفقيا وكذلك α_3 موجودة فيه والمستوى α قائم وخطى المسقط على π_3 وتقع عليه كل المساقط للنقاط الموجودة فى α ولكنها تحمل رقم 3 .

<u>ولتنفيذ ذلك وصفيا يتم الأتي:</u>

تعين الأثر المساعد للمستوى: يتم إختيار أى نقطة واقعة على الأثر الرأسي مثل N_2 وبالتالي مسقطها الأفقي N_1 على خط الأرض ونرسم منه عمودى على X_{13} الجديد وبعدة نقيس البعد Z_N فيتحدد N_3 شكل 203و 202 حيث تقع على الأثر الجديد α_3 للمستوى العمودى ونستنتجه بتوصيل نقطه N_3 مع نقطه تقاطع h^α مع X_{13}



شكل 204

وهى O_3 فنحصل على α_3 وهو مسقط المستوى α فى π_3 ويصبح مستوى خطى المسقط. ويصبح هـذا إسـلوب تحويل مستوى α من وضع عام بالنسبه إلى π_1 إلى مستوى عمودى بالنسبة لمستوى إضافي π_3 *عمودى عليه*. وبذلك يكون دائما الأثر h^α عموديا على خط الأرض (المستوى π_3 مع π_1) وهو x_{13} ويمكن تكرار كل ذلك بالنسبة π_2 حيث نختار مستوى عموديا على π_2 ، وبالتالي $V^\alpha \perp X_{24}$، ولنأتي بالأثر الباقي α_4 نأخذ نقطة مثل M_1 على الأثر الأفقى ومنها M_2 على خط الأرض ومن خلال Y_M نحصل على M_4 وعلية نوجد α_4 بتوصيل نقطـه تقـاطع V_α و X_{24} وهى O_4 مع M_4 كما حدث في α_3. ويمكن أن نحصل على كل من α_3 من خلال إيجاد المسقط الثالث على المستوى الأفقى لمجموعة من النقاط تقع فى المستوى (على الأقل إثنين ونصلهم ببعض) ، أو α_4 من خلال إيجاد المسقط الرابع على المستوى الرأسى لمجموعة من النقاط تقع فى المستوى (على الأقل إثنين ونصلهم ببعض). والان اصبح لـدينا زاوية ميل المستوى α على المستوى الأفقي وهي ϕ_1 شكل 202و 204 ، وكذلك زاوية ميل المسـتوى α علـى

المستوى الرأسى وهي ϕ_2 شكل **204** .(هذا للمستوى الممثل بأثرية وسيتم اجراء نفس الوضـــع عنـــدما يكـــون المستوى ممثل بمستقيمين)

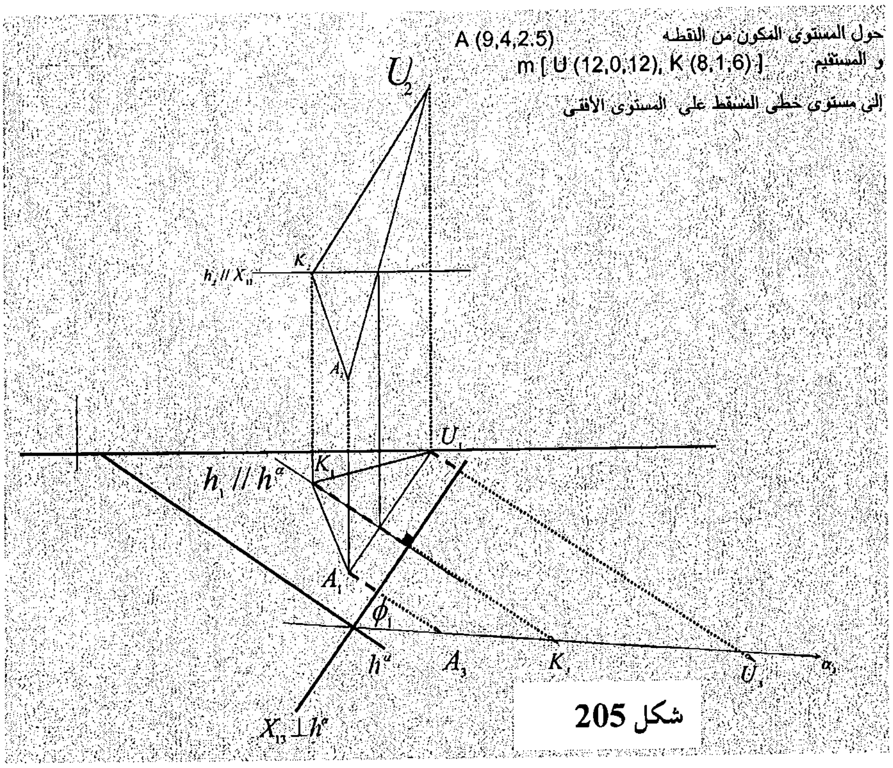
-تنبية – أى نقطة تقع في المستوى α عند نقلها إلى مستوى عمودى فإنها تقع دائما على الأثر الجديد للمستوى مـــن خلال Y_N , Z_N سواء كان α_3 أو α_4 .

-عند تحويل المستوى إلى عمودى على الأفقي شكل **202**و **204** فان المستوى الجديد العمودى (h^α, α_3) ما هو الا مستوى يشبه العمودى على الأفقي حيث α_3 أثر المستوى على المستوى العمودى π_3 وعند تحويل المســـتوى إلي عمودى على الرأسي فإن المستوى الجديد يكون (V^α, α_4) ماهو إلامستوى يشبه العمودى على الرأ سى كمـــا في الإسقاط على π_1 ، π_2 .

<u>ماهى الاستفادة من تحويل المستوى إلى خطى المسقط</u>

1. معرفة زوايا ميل المستوى عل كل من المستوى الأفقى والرأسى، إستنتاج أثار المستوى على المستويين π_1 , π_2
2. إيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط
3. إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى (مضلع تقاطع المستوى مع الكرة و كثيرات السطوح)
4. رسم مستوى يوازى مستوى على بعد ثابت
5. إمكانية رسم مستقيم يوازى مستوى من نقطة معلومة "تطبيق غير متاح فى أى باب أخر"

مثال: الحصول على الأثار وزوايا الميل فى المستوى الأفقى

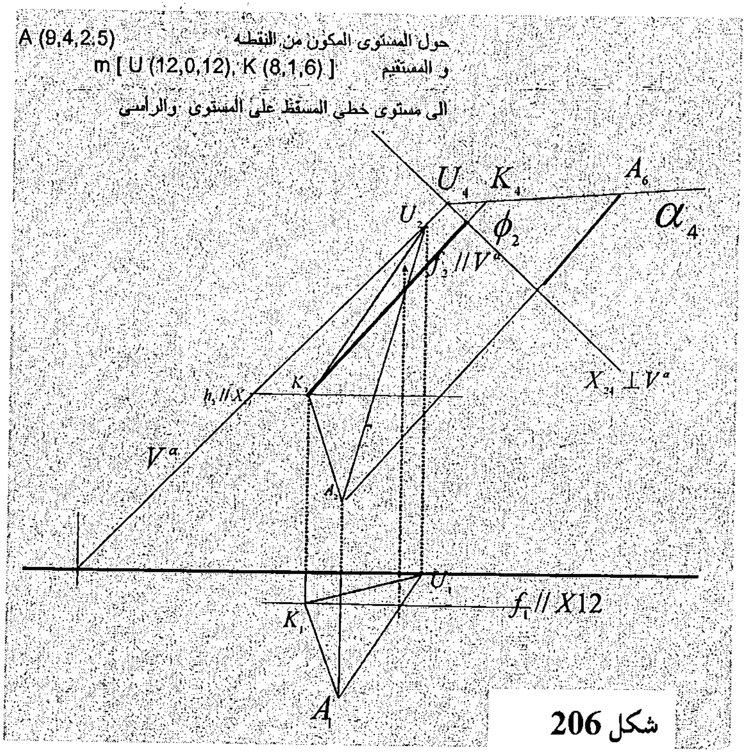


شكل 205

فى هذا المثال شكل 205 المستوى مكون من نقطة A ومستقيم m ، أى يمكن تكوين المستوى كاملا ، ولكى نحول المستوى لخطى المسقط الأفقى نستخدم X_{13} عمودى على الأثر الأفقى أو مايوازيه ونتيجة لأن الأثر غير موجود نبحث عن إتجاهه ويمكن بأن نمرر مستقيم أفقى h_2 كما فى الشكل 205 فنوجد مسقطه الأفقى h_1 وهو نفس إتجاه الأثر الأفقى وبالتالى يمكن رسم خط الأرض الجديد X_{13} عمودى على h_1 ومن ثم نوجد المسقط الثالث لكل النقاط فى المستوى وهى A_3, K_3, U_3 ونجدها عند توصيلها تقع على خط واحد ويكون هو α_3 ويتحول المستوى بذلك لخطى المسقط الأفقى.

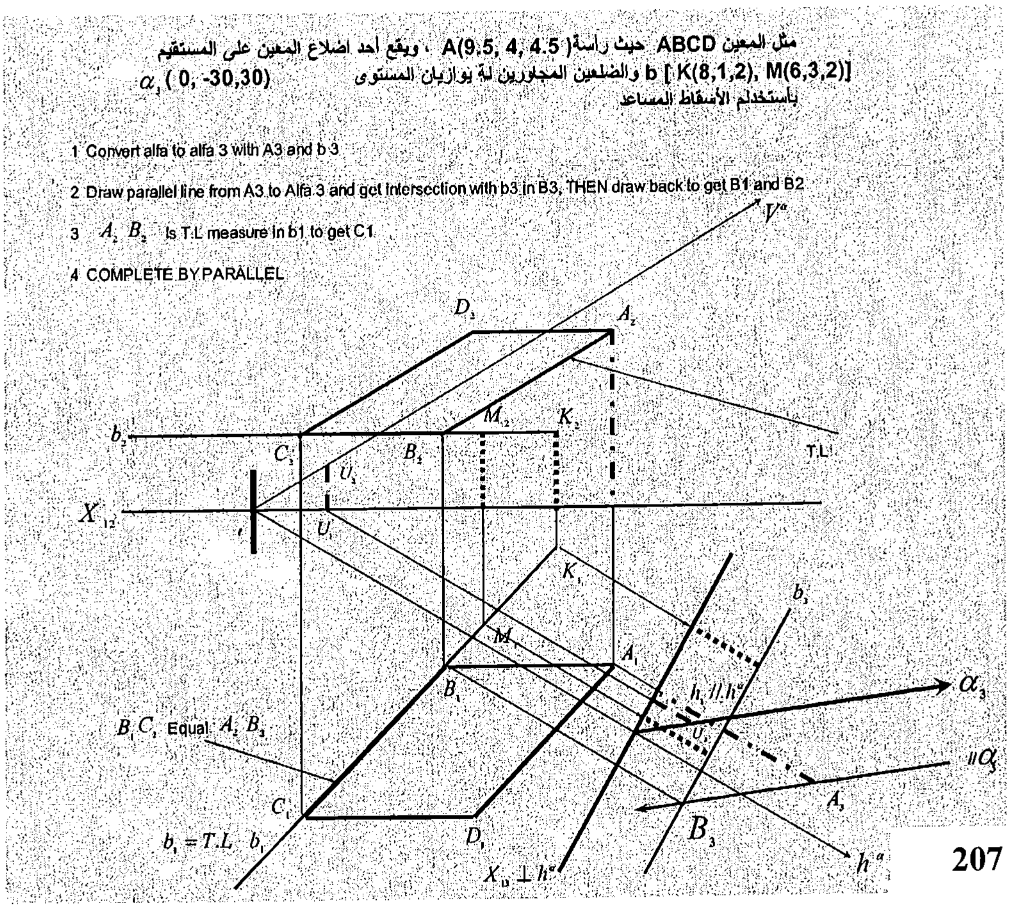
بالإسلوب السابق نكون قد قطعنا خطوة نحو الإستفادة من الحصول على خطى المسقط فى مستوى ممثل بمستقيمين حيث يمكن الأن الحصول على أثار المستوى بأن نمد α_3 حتى يقطع X_{13} فى نقطة ستكون هى نقطة إنطلاق h^{α} الذى يُرسم عمودى على X_{13} حتى يقطع خط الأرض ومنه نكمل رسم الأثر الرأسى للمستوى وكذلك نكون حصلنا على زاوية ميل المستوى α على المستوى الأفقى وهى ϕ_1.

الحصول على الأثار وزوايا الميل فى المستوى الرأسى



شكل 206

ولكى نحول المستوى لخطى المسقط الرأسى نستخدم X_{24} عمودى على الأثر الرأسى أو مايوازيه ونتيجة لأن الأثر غير موجود نبحث عن إتجاهـه ويمكن بأن نمرر مستقيم ,وجهى f_1 كما فى الشكل **206** فنوجد مسقطه الرأسى f_2 وهو نفس إتجـاه الأثـر الرأسى وبالتالى يمكن رسـم خـط الأرض الجديد X_{24} عمودى على f_2 ومن ثم نوجد المسقط الرابـع لكـل النقاط فى المستوى وهى A_4, K_4, U_4 ونجدها عند توصيلها تقع على خط واحد ويكون هو α_4 ويتحول المستوى بذلك لخطى المسقط الرأسى. بالإسلوب السابق نكون قد قطعنا خطوة نحو الإستفادة من الحصول على خطى المسقط فى مستوى ممثل بمستقيمين حيث يمكن الأن الحصول على أثار المستوى بأن نمد α_4 حتى يقطع X_{24} فى نقطة ستكون هى نقطة إنطلاق V^{α} الذى يُرسم عمودى على X_{24} حتى يقطع خط الأرض ومنه نكمل رسم الأثر الأفقى للمستوى.



شكل 207

الحل:

1. نحول المستوى إلى خطى المسقط الأفقى بإستخدام X_{13} عمودى على h^α وأيضا يذهب معه كل من **A**و **b** حيث نحصل على **b_3, A_3** شكل **207**

2. من **A_3** نرسم مستقيم موازى للمستوى الخطى المسقط α_3 فيقطع **b_3** فى نقطة **B_3** ونعود بها فنستنتج **B_1**و **B**

3. يتم قياس الطول الحقيقى للمستقيم **AB** على إتجاه الطول الحقيقى للمستقيم **BC** الواقع على المستقيم **b** إبتداء من نقطة **B** . كما تم فى حل نفس المثال فى الموضع. ونكمل الشكل **207**

فى هذا المثال يتضح النتيجه الأتيه وهى:

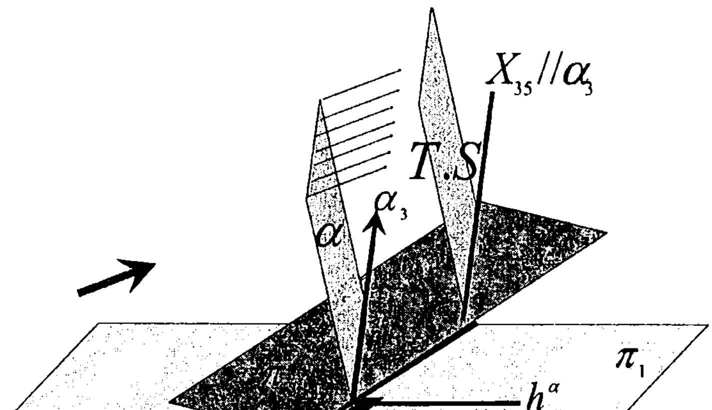
الحاله الوحيده فى الهندسه الوصفيه التى يمكن فيها رسم مستقيم واحد يوازى مستوى (ويوازى كل المستقيمات فيه) تتم بتحويل المستوى إلى خطى المسقط شكل 207. ونلاحظ أنه بتحويل المستوى إلى خطى المسقط تكون كل المستقيمات فى المستوى تقع على هذا الخط الموجود فى π_3 وهو α_3وعند هذا الوضع يتم رسم من أى نقطه فى الثلاثات مستقيم يوازى المستوى α_3 لأنه سيوازى كل المستقيمات فى المستوى.

- يمكن إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى أيضا بتحويل المستوى إلى خطى المسقطيم فتظهر نقطة التقاطع مباشرة فى الثلاثات ونرجعها على المستقيم مباشرة مثل نقطة تقاطع الموازى المرسوم فىشكل 207 مع α_3 وهى B_3 ويظهر فى التطبيقات الخاصة بتقاطع المستوى مع أحرف كثيرات السطوح.

-لو عُلم مسقط نقطة في المستوى مثلا الأفقي وكان ناقص الأثر الرأسي للنقطة وكذلك الأثر الرأسي للمستوى غير المعلوم، وكانت زاوية ميل المستوى على الأفقي موجود فإنه بإستخدام زاوية الميل Φ يمكن إيجاد البعد z في الإسقاط المساعد ونقله للمستوى الرأسي .

جعل مستوى موازيا لمستوى المسقط (لتعين الشكل الحقيقي للمستوى)

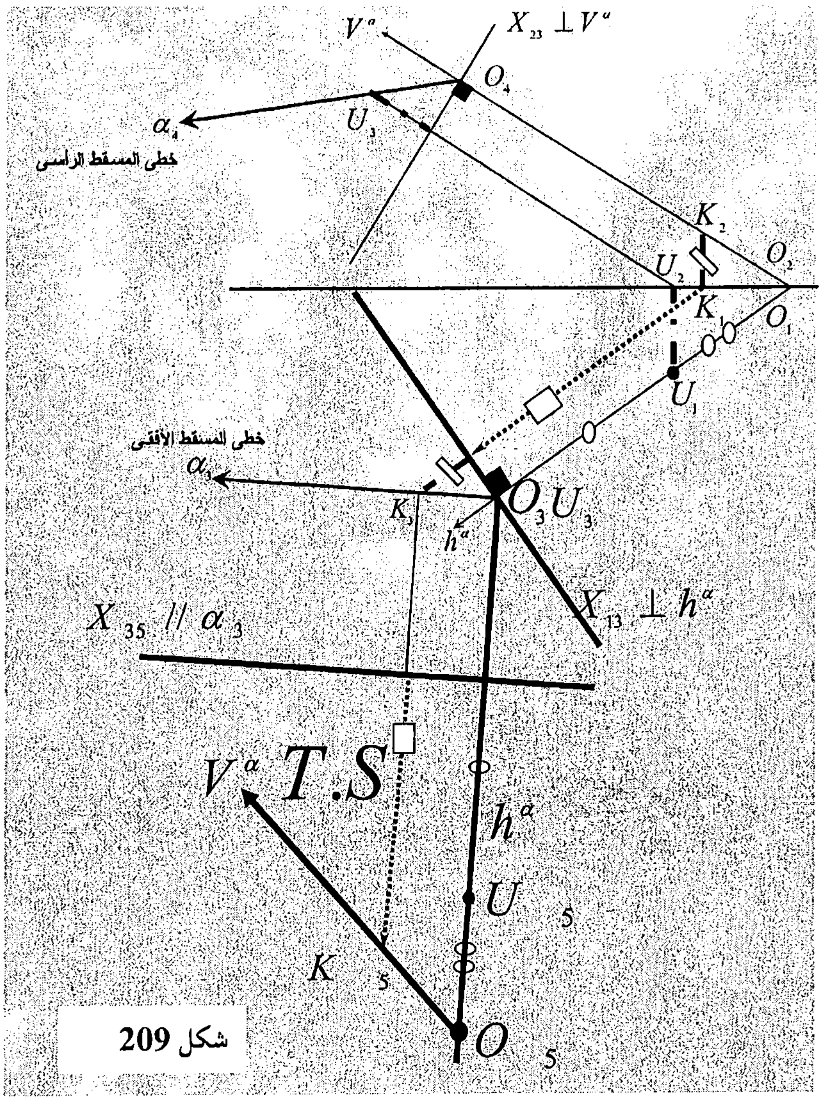
للحصول على الشكل الحقيقي للمثلث يتم أولا تحويل المستوى إلى مستوى عمودى بإستخدام π_1 عمودى على π_3 ونعين O_3, U_3, K_3 ونصلهم فيكون خط



شكل 208

مستقيم α_3 شكل 208و 209. نقوم بالإسقاط مرة أخرى بالإستعانة مستوى مساعد π_5يعبر عنه بخط تقاطع هو X_{35} يوازى α_3 شكل 209و 208. ونعين المساقط المساعدة للنقاط $O_5K_5U_5$ بالأبعاد فوق خط الأض X_{13}

وعند الإسقاط فى π_5 نحصل نحصل على الشكل الحقيقي للمستوى شكل **209** حيث **OK** هو الأثر الرأسى و**OU** هو الأثر الأفقى شكل **209**. ومن ذلك نكون حصلنا على الشكل الحقيقى للمستوى بأثريه وكذلك الزاوية الحقيقة بين أثرى المستوى. ويمكن أن نوجد المنصف للزاوية بين أثرى المستوى من خلال التنصيف للزاوية فى "الخمســـات) أى فى π_5 ونختار أى نقطة على المنصف ونرجعها فترجع على α_3 ومن ثم لنأتى بالمسقط الأفقى لهذه النقطة ننقل الأبعاد تحت **X_{35}** فوق **X_{13}** ثم نصلها بالمسقط الأفقى لنقطة **O** فنحصل على مسقط المسقط الأفقى للمنصف للزاوية بين أثـــرى المستوى. ويمكن احداث ذلك في المستوى الرأسي . كذلك اذا لم يكن المستوى α معلوم يتم الإستعانة بمستقيم أفقي أو وجهي كما سبق .



شكل 209

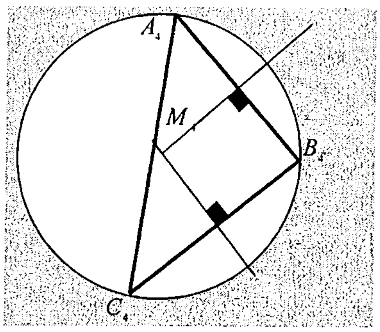
مثال: المعلوم الثلاث نقاط الأتية: A,B,C أوجد الشكل الحقيقى للمثلث ABC ومركز الدائرة التى تمر بالرؤوس الثلاثة

أولا : الشكل الحقيقى نأتى به بالإسلوب السابق حيث نمرر مستقيم أفقى **h** ونحول المستوى الممثل بالثلاث نقـاط إلى خطى المسقط ومنه نحصل على الشكل الحقيقى $A_5B_5C_5$. شكل **210**

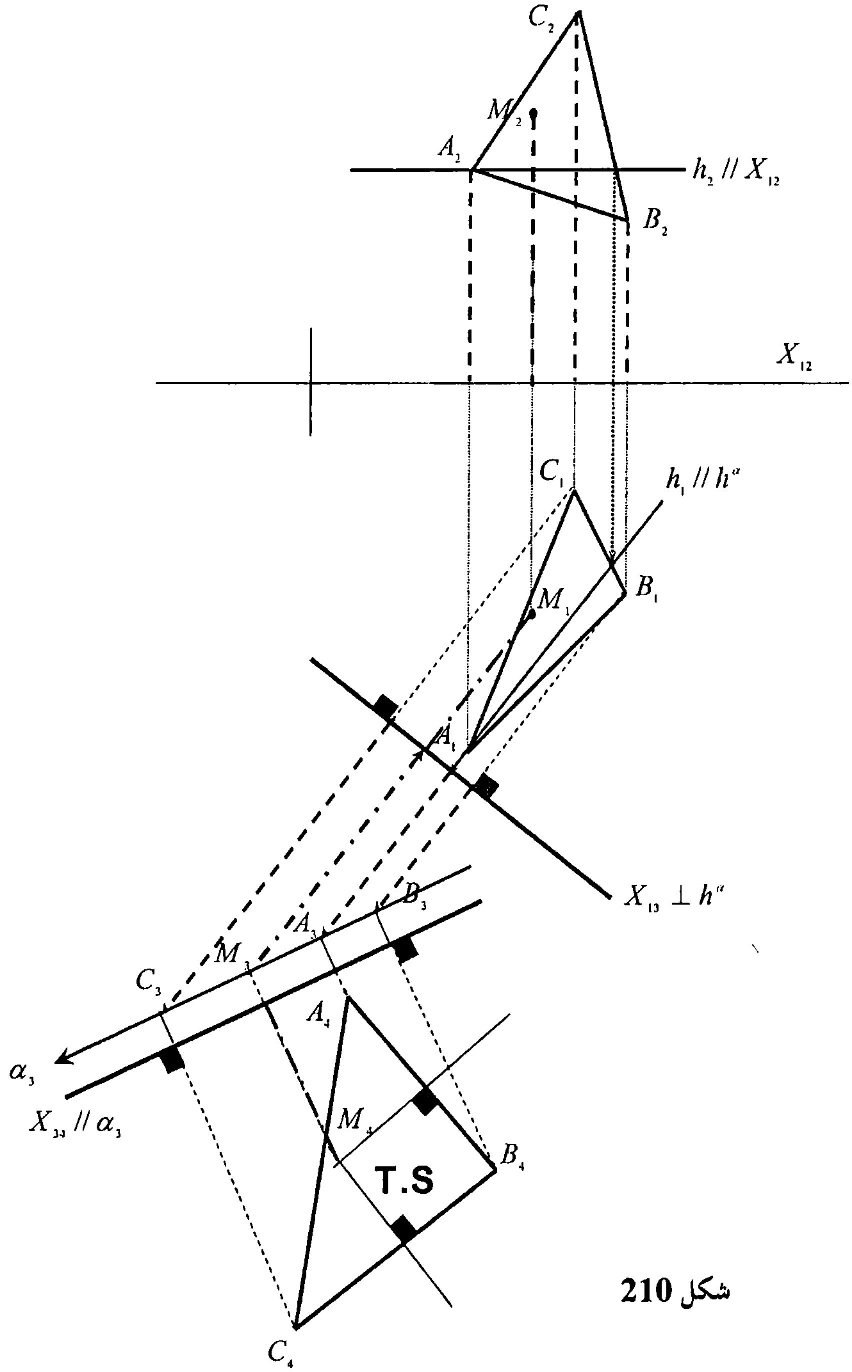
ثانيا: تأكيد الحل

الفكرة العامه أنة عند حل المسأله فى الهندسة المستوية ووجد أننا سنحتاج إلى رسم أكثر من عمود على أكثر من مستقيم للحصول على المحل الهندسى المطلوب " المركز " فإن هذا سيدفعنا إلى أن نبحث عن مكونات مستوى الشكل المطلوب (الدائرة) والإعتماد عليها لتحويل المستوى إلى الشكل الحقيقى **(T.S)** وإيجاد المركز المطلوب على هذة الأعمدة فى ال **T.S** ثم الرجوع به إلى مستويات الإسقاط الأصلية **1**و**2**. وذلك يتضح فى شكل الدائرة المرسوم فى الهندسة المستوية وكيفية الحصول عل المركز شكل **210**و مثال شكل **211** .

قاعدة: مادام فى الحل بالهندسة المستوية سيتم عمل أكثر من عمود على أكثر من مستقيم تعرف على طول إنك لازم تروح بالمستوى فى الشكل الحقيقى لتحقيق المطلوب



المعلوم ثلاث نقاط C (5,2,7)   B (6,4,3)   A (3,7,4) والمطلوب تمثيل الدائرة التى يمر محيطها بالثلاث نقاط



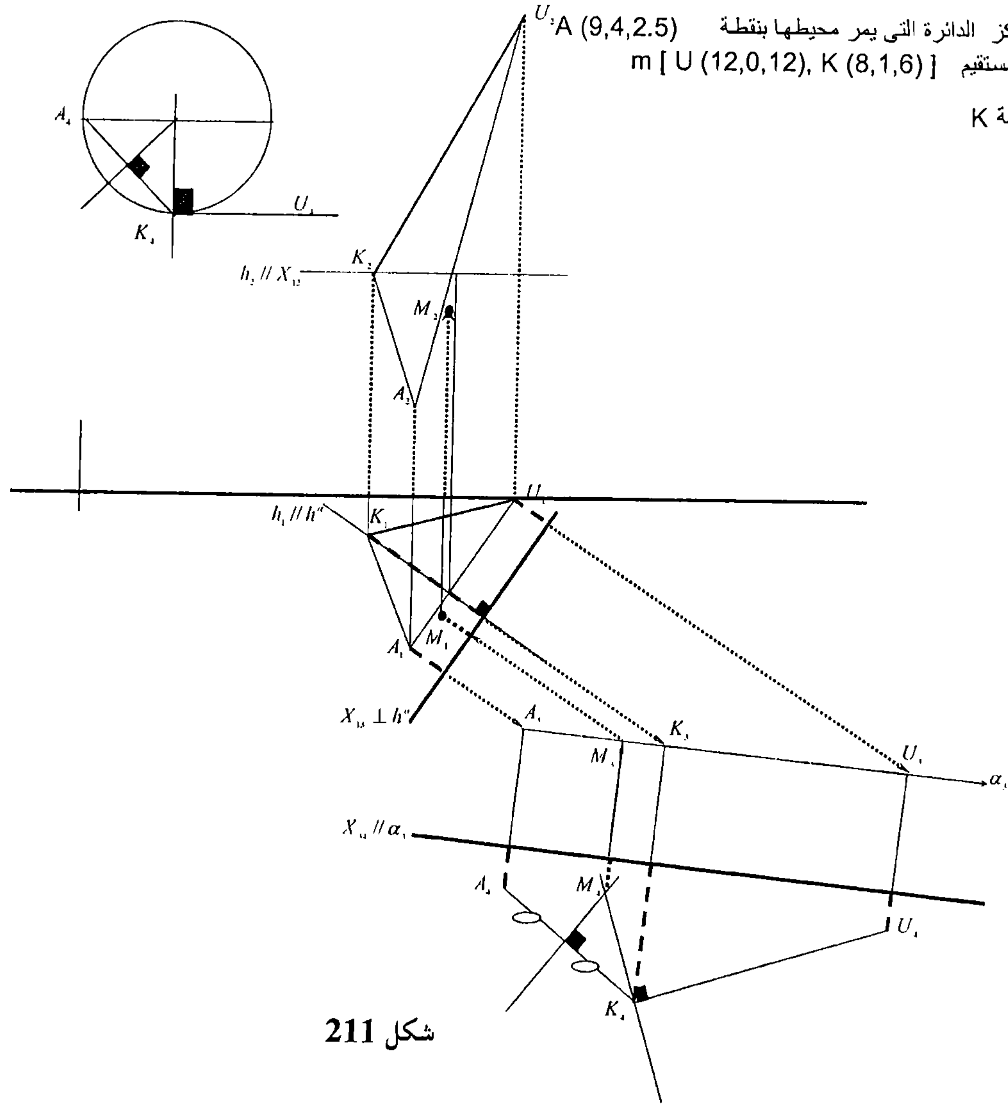
شكل 210

فى هذا المثال إستخدمنا X_{34} فى المستوى الأفقى وهو يجوز لو أننا لن نستخدم الإسقاط فى المستوى الرأسى بنفس الرقم.

دكتور مهندس/ أحمد محمد القصاص

مثال:

اوجد مركز الدائرة التى يمر محيطها بنقطة A (9,4,2.5)
وتمس المستقيم m [U (12,0,12), K (8,1,6)]
عند النقطة K



شكل 211

الزاوية بين مستقيمين شماليين

لإيجاد قيمة الزاوية بين مستقيمين شماليان لختار نقطة ما فى الفراغ ونرسم منها مستقيمين موازيان لهما وبذلك ننتج الزاوية بين المستقيمين هي نفسها بين الشماالين ولكنها الأن بين مستقيمين يقعا فى نفس المستوى لـذلك متجـه للحصول على الشكل الحقيقى للمشتوى، فنمرر مستقيم أفقي مثلا **h** وبالتالي نسقط المستقيمين على مستوى عمودى ويتحول مستوى المستقيمين إلى خط M_3 , N_3 , U_3 ثم نسقط ثانيا على مستوى وبذلك تظهـر الزاويـة بشـكلها الحقيقي . كما يحدث عند إستخراج الشكل الحقيقي لأى مسقط

تمارين الإسقاط المساعد

1. المعلوم مستقيم $a(A(5,2,1)\ ,B(2,6,3))$ عين بالإسقاط على مستويان إضافية الطول الحقيقي للمسافة AB وزاوية ميل المستقيم على π_2,π_1 .
2. مثل المربع ABCDمعلوم منه الضلع AB حيثا AB(5,5,6) اذا فرض ان B_1C_1 يميل30 مع α_{12} . [من α_{13} نحصل على A_3B_3 نختار N_1نقطة على B_1C_1 ونوجد لها N_3ونتقل ΔZ_N ونتقلها الي المستوى الرأسي فنحصل على N_2 وخط عمل B_2C_2 وبالتالي نحصل على الطول الحقيقي ونقيس علية فنحصل على C_1 وكذلك C_2 ونكمل المربع بالتوازى].
3. عين زاوية ميل المستوى α (5,120,45) على π_2,π_1 .
4. عين الشكل الحقيقي لمثلث رأسي A(4,1,3) ,B(1,4,1) ,C(2,9,5) ومثل دائرة تمس الاضلاع من الداخل
5. عين الشكل الحقيقي للمثلث A(11,7,2) , B(14,2,6) , C(18,4,3) ثم مركز الدائرة التى تمس رؤوسة
6. عين مقدار الزاوية بين أثرية المستوى α (4,120,45) ثم مثل منصفا هذه الزاوية .
7. المعلوم المستقيم a [A (5,2,1), B(2,9,5)] عين بإسقاط على مستويات اضافية الطول الحقيقي للمسافة AB وزاويتي ميل المستقيم a على π_2,π_1 .
8. المعلوم المثلث ABC فية A(0,0.5,5) , B(3,3,1) , C(5,-1.5,3) عين الشكل الحقيقي للمثلث بإستخدام المستويات المساعدة .
9. بإستخدام مستوى اضافي عمودى على π_2 مثل مسقطى المثلث ABC الواقـع في المستوى α (-3,2,2) إذا عملت ان : A(0,y,l) , B(-2.5,?,2) , C(2,?,3) .
10. عين زاوية ميل المستوى β (5,120,45) على من π_2,π_1 .
11. المعلوم الأثر الأفقي h(1,135) لمستوى فاذا كانت زاوية ميل هذا المستوى على π_1 هي 60 و المطلوب تعيين الأثر الرأسي v لهذا المستوى وزاوية ميل المستوى على π_2 .
12. عين زاوية ميل المستوى α على كل من π_2,π_1 - اذا كان α معلوم بالمستقيمين المتقاطعين AB, CB حيث و A(8,4,3),C(1,7,1), B(4,2,6)
13. مثل مربعا مركزة M(8,7.5,5.5) واحد اضلاعة يقع المستقيم b حيث : b(11,13,5.0) (3,11,5.5)
14. مثل مربعا ABCD (A(11,4.5,4 رأس فيه وأحد قطرية يقع على المستقيم a(12,8,1) , (7,1,5) .
15. مثل المعين ABCD حيث رأسة A(9.5,4,4.5) – ويقع احد اضلاعة المعين على المستقيم b(L(8,1,2) M (6,3,2) و الضلعين المجاورين يوازيان المستوى α (30 , 30-,0) ذلك بإستخدام الإسقاط المساعدة .
16. إرسم المسقط على مستوى اضافي عمودي على π_2 ويميل 120 عل π_1 لهرم قائم رأسة V (4,4,5) وقاعدته في π_1 مربع احد قطرية يوازى خط الأرض X12 وطولة 5 سم .
17. مثل مثلث عموديا على π_2 متساوى الاضلاعة معلوم فيها الضلع b(6,2,5) A(3,3,7) مثل منشور قائما قاعدته هذا المثلث وطول حرفة 5 سم .

18. مثل مثلث متساوى الساقين قاعدته $c(6,6,5)$ $B(9,2,3)$ ورأسة A تقـع علـى المسـتقيم $d(7,1,1)$, $(3,5,3)$ وعين طول الساق .

19. مثل مستقيم a يمر بنقطة $N(3,2,1)$ ويقطع مستقيما $(4,4,4)$, $b(8,2,2)$ ويتعامد علـى المسـتقيم c حيث $(0,6,5)$, $c(5,1,1)$.

20. مثل مربعا ABCD معلوم فيه $B(6,4,5)$, $A(3,2,2)$ و المسقط الأفقى $N_1(1.2)$ لنقطة N يمـر بهـا الضلع CD .

21. مثل مكعبا أحد أحرفة $B(5,9.5,3)$ $A(8,11,8)$ اذا فرض ان المسقط الأفقي لحرف ثان يمر بـالرأس A يصنع زاوية 45 مع خط الأرض .

22. عين البعد بن مستقيمن متوازين n,m حيث $C(5,8,6)$ $n,m(B(9,3.5,2)$ يمـر ينقسـم $A(8,2,4)$ اذكر الحل الفاغر مثل بالإسقاط .

الباب الثامن

القياس

القيـــــاس

يبحث موضوع القياس التعامد بين المستقيمات وبعضها ، والمستقيمات مع المستويات، وأيضا المستويات مـــع بعضها. وأيضا يبحث دوران نقطة ومستقيم ومستوى حول أحد المستقيمات الأفقية أو الوجهية أو مايناظرها من أثـــار المستوات ومايترتب على ذلك من إيجاد الأشكال الحقيقية للمستقيمات والمستويات والأشكال الهندسية الـــتى تقـــع فى مستوى وأحد، وأيضا التطبيقات المترتبة على ذلك.

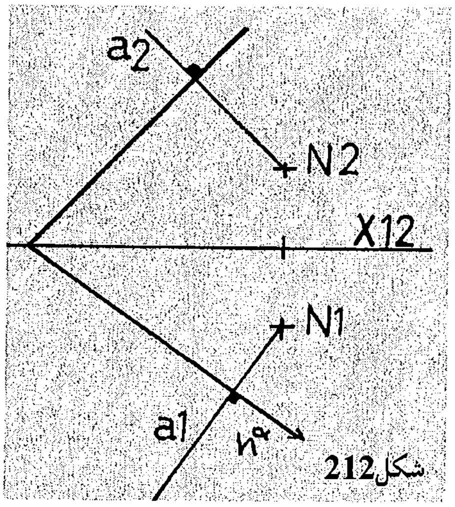
التعامد بين المستقيمات والمستويات

a- تمثيل المستقيم العمودي من نقطة معلومة N على مستوى معلوم α ممثل:

أولا : المستوى معلوم بأثريه

1-من N_1 نرسم خط a_1 عمـــودي علـــى الأثـــر الأفقـــى للمستوى h^{α} فيكون المسقط الأفقى للمستقيم العمودى a.

2-من N_2 نرسم خط a_2 عمودي على V^{α} فيكون المسقط الرأسى للمستقيم العمودى a . (يتم إسقاط أعمدة مباشرة لأن الأثار للمستوى أطـــوال حقيقيـــة والزاويـــة القائمـــة تُســـقط قائمة...) شكل 212

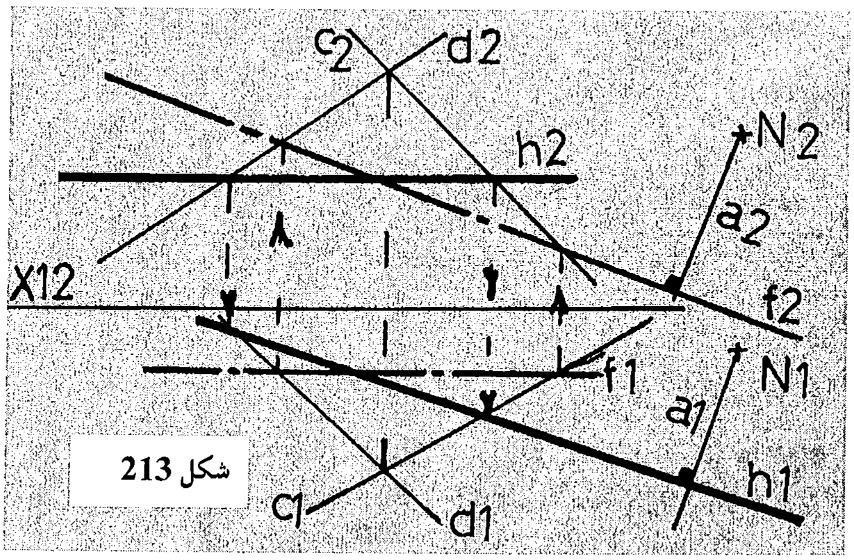


شكل212

ثانيا : المستوى ممثل بمستقيمين (متوازين أو متقاطعين) :

(نكرر نفس البند السابق ولكن على إتجاه الأثـــار وذلك لأن العمودى على خـــط عمـــودى علـــى مايوازيه) شكل 213

1- مـــن N_1 نرســـم a_1عمودي على h_1 وهو



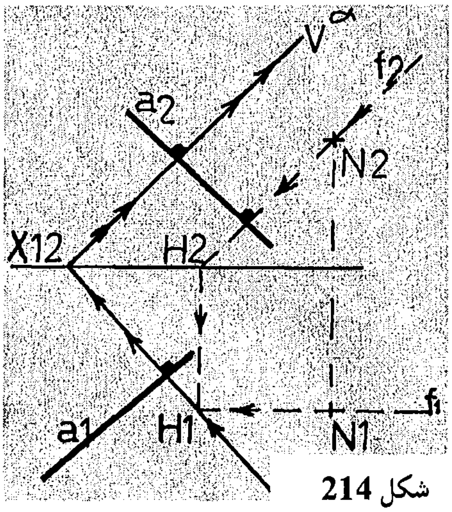
شكل 213

المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي المُمرر فى مستوى المستقيمين وله نفس إتجاه الأثرالأفقي للمستوى (حيث $h_1 // h^{\alpha}$).

2- من N_2 نرسم a_2 عمودي على f_2 وهو المسقط الرأسى للمستقيم الوجهي الممرر فى مستوى المستقيمين وله نفس إتجاه الأثر الرأسى للمستوى (حيث $f_2 // V^{\alpha}$) .

b- تمثيل مستوى يمر بنقطة معلومة N وعمودي على مستقيم معلوم .

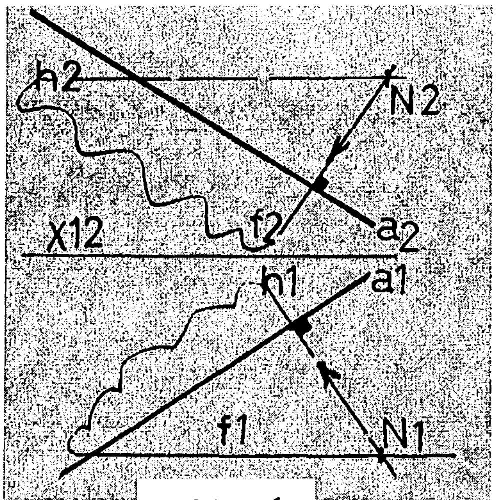
1- تمثيل المستوى العمودى بأثريه



شكل 214

يتم ذلك بإستخدام مستقيم أفقى عمودى أو وجهى عمـــودى ممر من النقطه N فنحصل على الأثر للمستقيم العمودى الواقع فى المستوى شكل 214 وبالتالى نرسم من أثر المستقيم الأثـــر للمستوى عمودى على المسقط للمستقيم ومن نقطة تلاقى الأثر العمودى المرسوم مع خط الأرض نرسم الأثر الأخر للمســـتوى عمودى على المسقط الأخر للمستقيم . وكما بالرســـم مـــثلا إستعنا بمستقيم وجهي عمودي f وبالتـــالي أنـــه يمـــر ب N ومسقطه الرأسي f_2 عمودي على المسقط الرأسي للمستقيم a_2 وبالتالي نحصل على أثر المستقيم الوجهي H_1 ومنـــه نرسم أثر المستوى الأفقي $h^{\alpha} \perp a_1$ ومن تلاقية مع X_{12} نرسم $\perp$ على a_2 فيكون V^{α}.

2- تمثيل المستوى العمودى بمستقيمين متقاطعين .



شكل 215

-من نقطة N1 نستعين بمستقيم أفقي فيه h_1 عمودي على a_1

-وكذلك من N_2 نستعين مستقيم وجهي f_2 عمودي على a_2

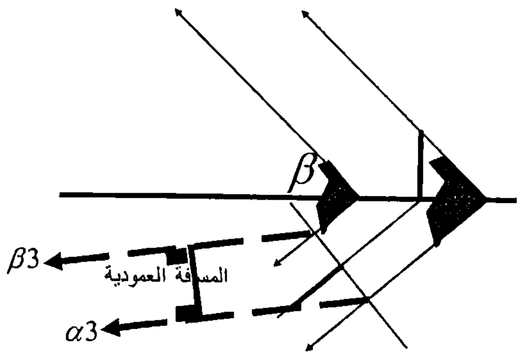
ويصبح المستوى العمودي مكون من مســـتقيمين أفقـــي و وجهي ويمران ب N . شكل 215

تمثيل مستوى يمر بمستقيم معلوم وعمودى على مستوى معلوم

نختار أي نقطة على المستقيم ونعتبرها N ونسقط منها أعمدة على الأثر كالحالة الأولى . وبالتالي يكون المستوى المطلوب هو المكون من المستقيم و العمودي على المستوى .

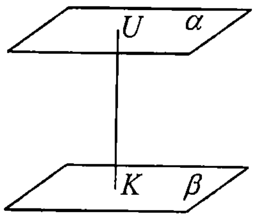
أقصر بعد بين مستويين متوازين

*الحل الأول: بإستخدام الإسقاط المساعد نحول المستويين إلى مستويين خطى المسقط فتكــون المســافة العموديــة واضحة وظاهرة بطولها الحقيقي. شكل 216



شكل216

* الحل الثاني: نختار فى المستوى α نقطة واقعة فيه هي U شكل 217 من خلال أي مستقيم أفقي أو وجهي في المستوى ونسقط منها عمودي على المستوى الأخر β ونأتي بتقاطع العمودي مــع هذا المستوى K ثم نأتي بالطول الحقيقي للجزء UK وهى بداية من نقطة الإسقاط وحتى نقطة التقاطع .

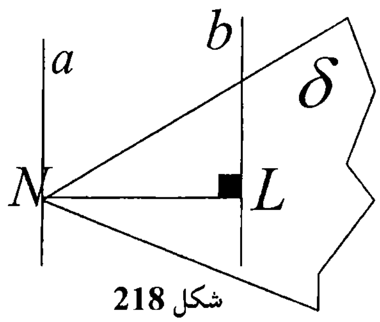


شكل 217

رسم مستوى يوازى مستوى ويبعد عنه مسافة معينة:

يمكن إستخدام الإسقاط كما سبق فى البند السابق بتعين البعد بين مستويين متوازين بالإسقاط المساعد حيــث نحصــل على α_3 ونقيس البعد العمودى المطلوب ثم نرسم من نهايته مستوى δ_3 أثاره توازى أثار المستوى α –أو نختــار أي نقطة على α ونقيم منها عمودي على المستوى نفسة ونختار أي نقطة على هذا العمودي وتأتي بطوله الحقيقي وعلية (على خط الطول الحقيقي)نعين البعد المطلوب ومنه نرسم أثار المستوى الجديد توازى أثار المستوى القديم .

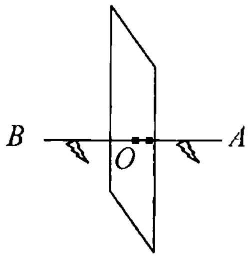
أقصر بعد بين مستقيمين متوازيين



شكل 218

نختار أي نقطة N على أحد المستقيمين ولــيكن علــى a ونرسم منها مستوى δ عمودي على المستقيم الأخر b ونأتي بنقطة تقاطع b مع δ تكون L ثم نأتي بالطول الحقيقي لهذا المستقيم وهو NL . (تستخدم هذه النظرية للحصول على بعد نقطـــة N عـــن مستقيم b) شكل 218

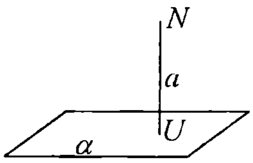
المحل الهندسي للنقط متساوية البعد عن نقطتين A,B :



شكل 219

ننصف المسافة AB في O ونرسم منها مستوى عمودي α على AB ويكون هو المحل الهندسي لجميع النقاط المتساوية البعد عن النقطتين . شكل 219

بعد نقطة N عن مستوى α



شكل 220

هو طول العمود الساقط من النقطة N إلى نقطة تقاطع العمود مع المستوى α .

1. نسقط عمود من النقطة N على المستوى a شكل 220
2. نوجد نقطة تقاطع العمودى a مع المستوى وهى U
3. نوجد الطول الحقيقى لهذا العمودى NU

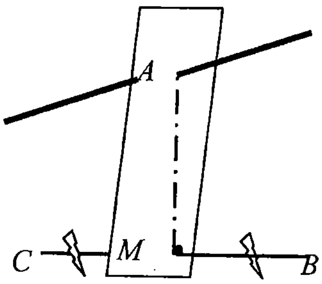
نتائج

1. مستقيم عمودى على مستوى فى وضع خاص " عمودى على(المستوى الأفقي أو الوجهى أو الجانبى)" هـــو مستقيم فى وضع خاص موازى (المستوى الأفقي أو الوجهى أو الجانبى) بالترتيب ويظهر بطولـــه الحقيقـــى فى المستوى الموازى

2. مستوى عمودى على مستقيم فى وضع خاص عمودى على(المستوى الأفقي أو الوجهى أو الجـــانبى) هـــو مستقيم فى وضع خاص موازى (المستوى الأفقي أو الوجهى أو الجانبى) بالترتيب

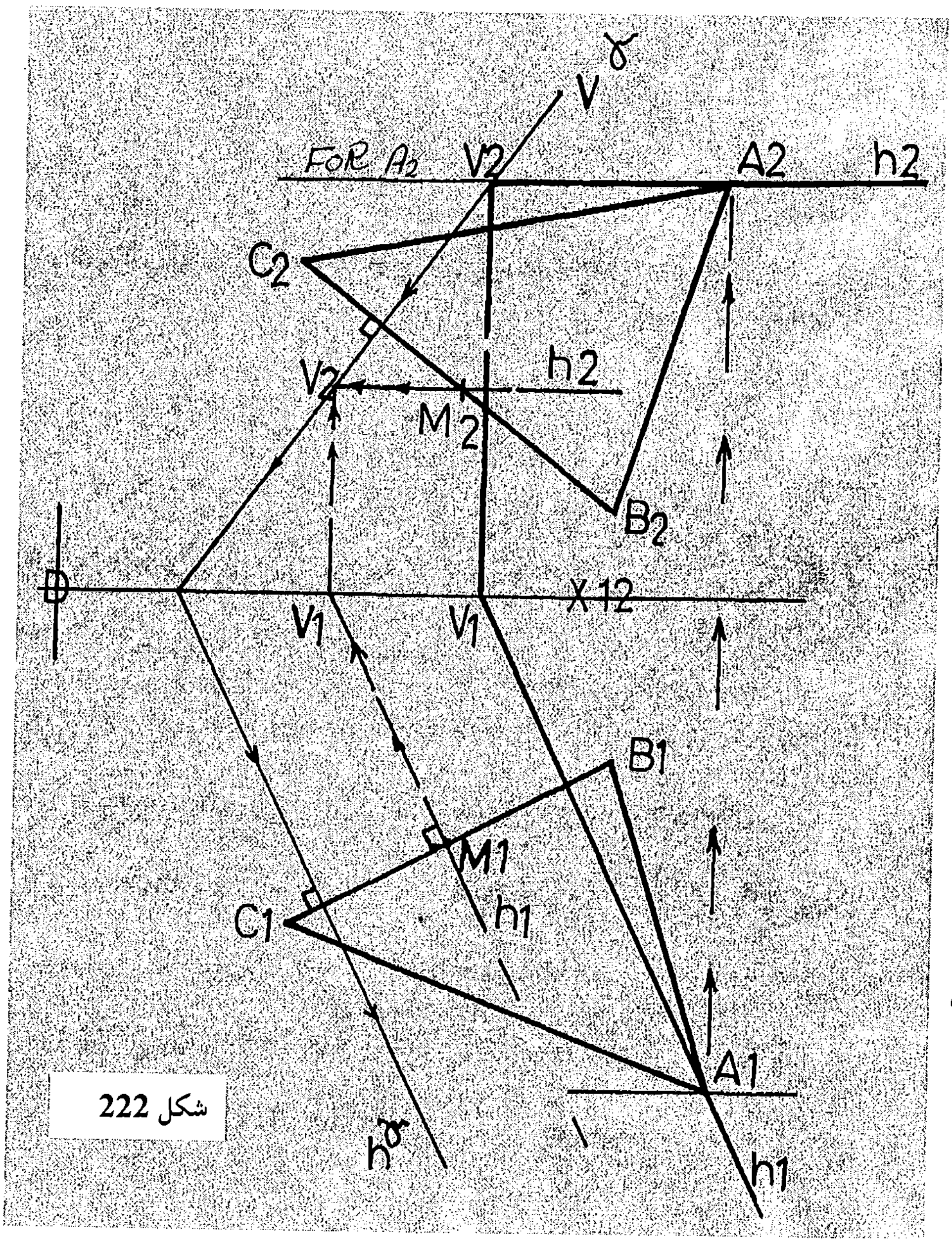
مثل المثلث ABC المتساوى الساقين الذي فية A(X,6,5),B(7,2,1),C(3,4,4) حيث AB=AC

الحل الفراغى:



شكل 222

من المعطيات الفراغيه شكل **221** يتضح وجود القاعده للمثلث المتساوى الساقين ولايوجد سوى المحل الهندسى للرأس، ومـــن خـــواص المثلـــث المتساوى الساقين فإن العمود القائم من منتصف القاعده يمر بالرأس، ونحن نعلم انه لا يمكن رسم مستقيم عمودى على مستقيم (لأن الإتجـــاه غـــير محدد) وإنما يتم رسم مســـتوى عمودى علـــى مستقيم حيـــث يحتـــوى كـــل المســــــتقيمات العموديــــــه المطلوبه وبداخله ستكون نقطـــه A الواقعه على العمودى القائم من المنتصـــف كما بالشـــكل الموضح.



شكل 222

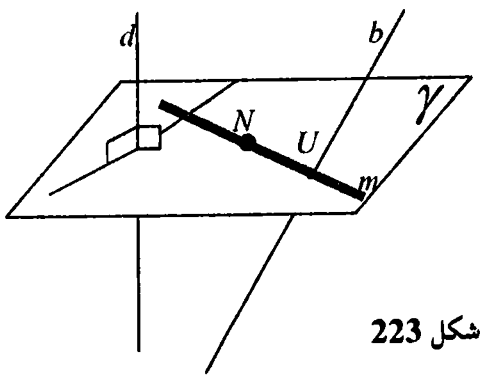
الحل الوصفى:

1- ننصف CB في M شكل 222

2--من نقطه M منتصف BC نرسم مستوى γ عمودي على BC بإستخدام مستقيم أفقى عمودى h يمر بــ M شكل 222

3- نقطه A تقع على الحل الهندسى لها وفى المستوى العمودى γ . وبالتالى فهى تقــع فى المستوى وتحقق الأحداثيات Y,Z لنقطه A ، ولذلك يمكن الإعتماد على الأحداثى Z ونمرر أفقى داخــل المســتوى فيتحدد من ذلك A_1 ومنه نأتى بالمسقط A_2 شكل 222.

المعلوم نقطة N(3,2,1) ومستقيمان شماليان d, b والمطلوب تمثيل مستقيم m يمر بنقطة N ويقطع B ويتعامد على d. [(8,1,2) ,(4,6,6)]b [(5,1,1) ,(0,6,5)]d . اذكر الحل الفراغي ثم مثل بالإسقاط



شكل 223

أسلوب التفكير: هذا النوع من أنواع التمارين الكلاميه أى التى ترتبط بشروط موضحه فى المطلوب، وإذا أمعنا فى الشروط المطلوبه نجد أنها هى خطوات الحل. فنجد أن المطلوب مستقيم يمر بN ويقطع b ويتعامد على d .
بالتالى فإن الحل هو عكس إتجاه هذا الكلام المطلوب، أى نرسم عمودى من N ثم نأتى بنقطه التقاطع. ومن هذا الحوار نبحث ماهو العمودى هل مستقيم أم مستوى، نجد أنه هناك نتيجه تحدثنا عنها سابقا وهى ؛ أنه عندما نجد اننا سنرسم عمودى على مستقيم فإنه لن يكون إلا مستوى عمودى لأنه سيشمل كل المستقيمات العموديه على هذا المستقيم ويتوقف إختيار المستقيم العمودى المطلوب على طبيعه التمرين المطروح أو باقى الشروط المطلوبه. ومن المستوى العمودى المرسوم سنرى ماهى النقطه التى تقع على المستقيم الأخر b وتقع فى هذا المستوى فنجد أنها نقطه تقاطع المستقيم b مع المستوى العمودى γ المرسوم من نقطه N وهى النقطه U شكل 223. وبالتالى القاطع المطلوب هو المستقيم الذى حقق الشروط المطلوبه وهو NU حيث أنه عمودى على d

ويقطع b فى U. ويجب أن تعلم أن شرط أن يكون مستقيم عمودى على مستقيم هو أن يقع فى مستوى عمودى عليه وليس أن يقطعه كما نلاحظ فى الشكل الفراغى حيث NU عمودى على d ولايقطعه شكل **223**.

الحل الفراغى: (شكل **223**)

1- من نقطه **N** نرسم مستوى γ عمودى على المستقيم d

2- نوجد نقطه تقاطع المستقيم b مع المستوى γ هى نقطه U

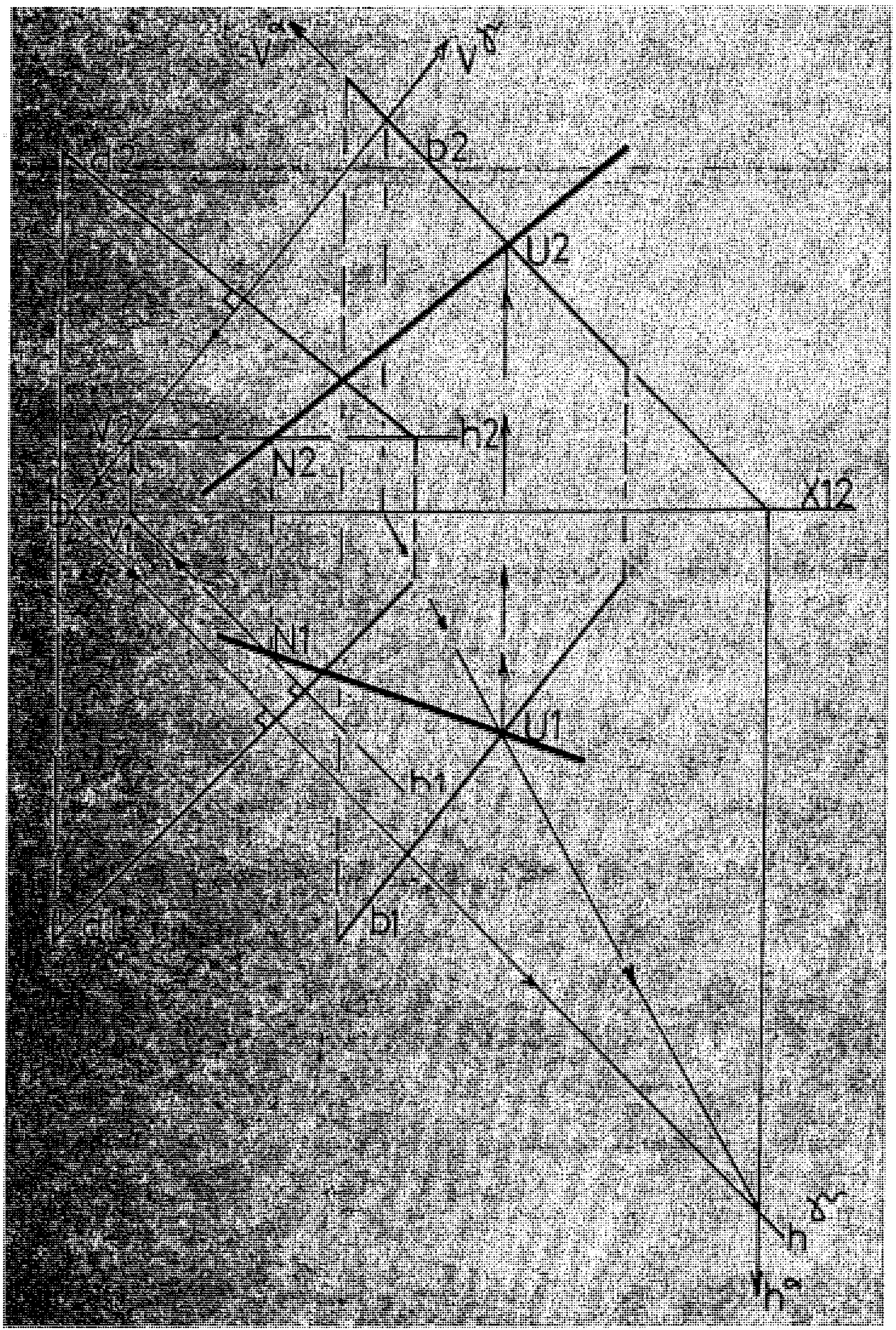
3- نصل نقطه U بنقطه N فيكون القاطع المطلوب

الحل الوصفى:

هو تنفيذ الخطوات الفراغيه بما يحققها من الخطوات التى تعلمناها فى الهندسه الوصفيه شكل **224** كالأتى:

1- من نقطه **N** نرسم مستوى عمودى على المستقيم **d** وذلك بإستخدام مستقيم أفقى عمودى أو وجهى عمودى لحصل على أثره ومنه نرسم أثار المستوى عموديه على مساقط المستقيم

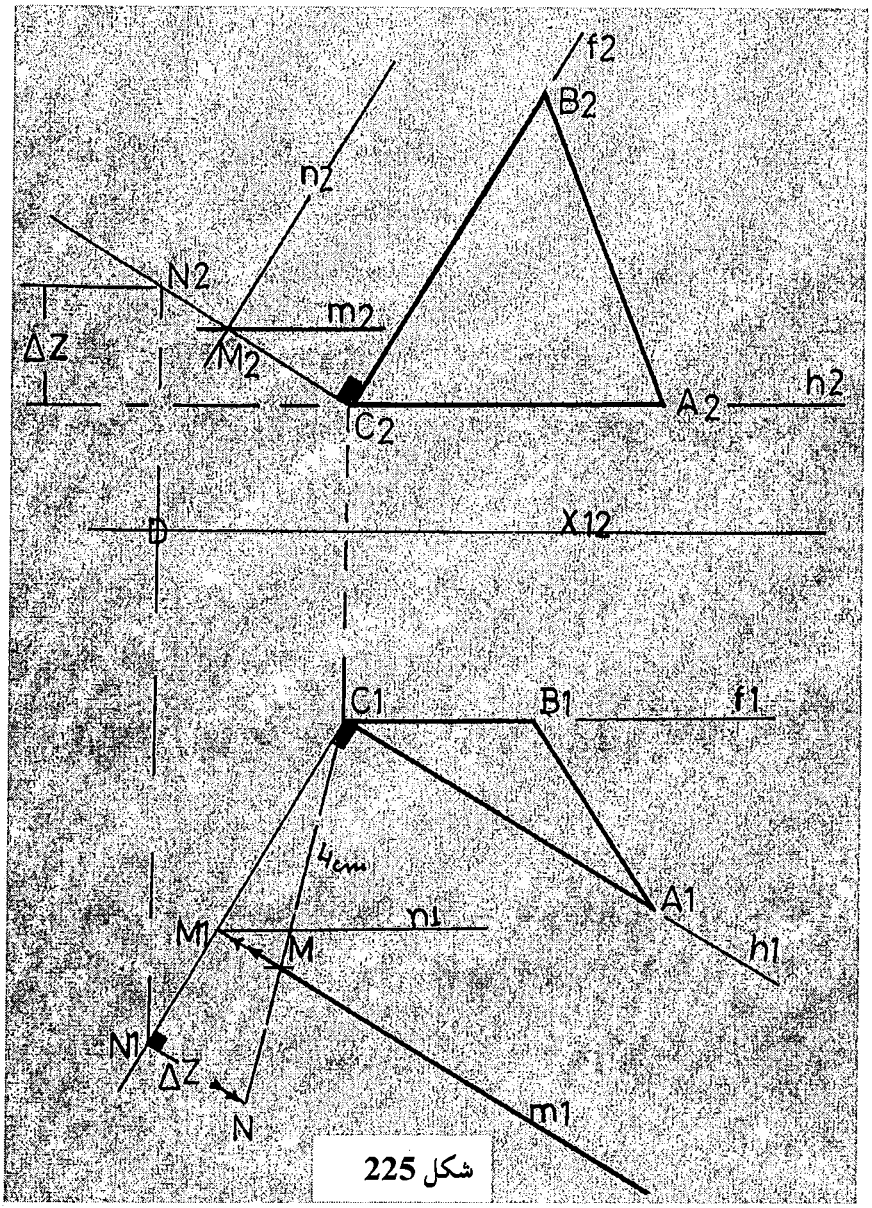
2- نوجد نقطه تقاطع المستقيم **b** مع المستوى العمودى وذلك بتمرير مستوى فى وضع خاص بالمستقيم فتتحول الحاله لخط تقاطع مستويين ،، خط التقاطع الناتج يقطع المستقيم فى نقطه **U** شكل **224**



شكل 224

المعلوم المثلث A(8,6,2),B(6,3,7), C(3,3,2) ، المطلوب تمثيل المحل الهندسى للمستقيمات التى توازى مستوى المثلث وتبعد عنه 4 cm .

الحل: المحل الهندسى للمستقيمات التى توازى مستوى المثلث هو المستوى الذى يوازى مستوى المثلث ويبعد عنه **4** سم ، وليتم ذلك يتم عمل الأتى :



شكل **225**

1- نرسم مستقيم عمودى على مستوى المثلث من أى نقطه بالمستوى شكل **225**. وليتم ذلك لابد من معرفه إتجاه أثار المستوى ونتيجه لأن المستوى ممثل بثلاث نقاط فإننا نلجأ إلى تمرير مستقيم أفقى لنعرف إتجاه h^{α} ومستقيم وجهى لنعرف إتجاه V^{α} لمستوى المثلث (وكحاله خاصه فى هذا المثال فإن **CA** أفقى و**CB**وجهى).

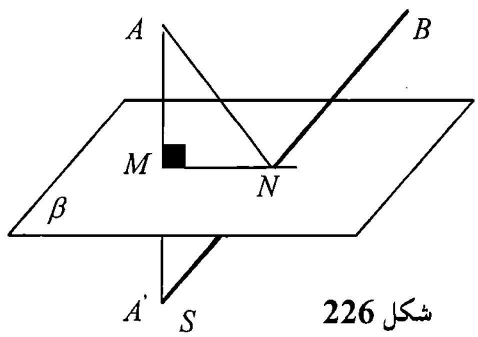
2- من أى نقطه أختياريه فى المستوى ولتكن **C** نقوم بإسقاط العمود المطلوب

3- نختار أى نقطه أختياريه على العمود ولتكن N لتحديد إتجاه الطول الحقيقى للعمود وقياس عليه طول 4 سم وتحديد مسقط النقطه وهى M.

4- من M نرسم مستوى يوازى مستوى المثلث ABC وذلك برسم مستقيم أفقى m موازى للأفقى الموجـــود بمستوى المثلث وكذلك مستقيم وجهى n موازى للوجهى الموجود بمستوى المثلث. كما بالشكل الموضح 225

المعلوم نقطتان $A(1,1,1)$, $B(6,3,-1)$ ومستوى β والمطلوب تمثيل نقطه فى β ولتكن N بحيث يكون طول BN+AN أقل مايمكن فى الحالات الاتيه:

1-المستوى $(8, \infty, 150^0)$ β 2- $(10, 45^0, 150^0)$ β. مثل الحل الفراغى



شكل 226

فكره الحل:فى شكل 226 أقصر مسافه بين نقطتين فى إتجـــاهين مختلفين مثل A,A' متماثلتين بالنسبه لمستوى " بالنسبه لنقطه M اى على العمودى على هذا المستوى " هى الخط الواصل بينهما، ولو كانت النقطتين فى إتجاه وأحد لمستوى مثل A,B فإن أقصـــر مسافه بينهما هى مسافه الخط المستقيم الواصل بين B والنقطـــه المتماثله للنقطه A بالنسبه للمستوى وهى A' حتى تشكل نفس الخط المستقيم المباشر " كمـــا فى الشـــكل الفراغـــى الموضح" وهو الخط الذى يقطع المستوى فى نقطهN شكل 226.

الحل الفراغى والوصفى شكل 227 و228:

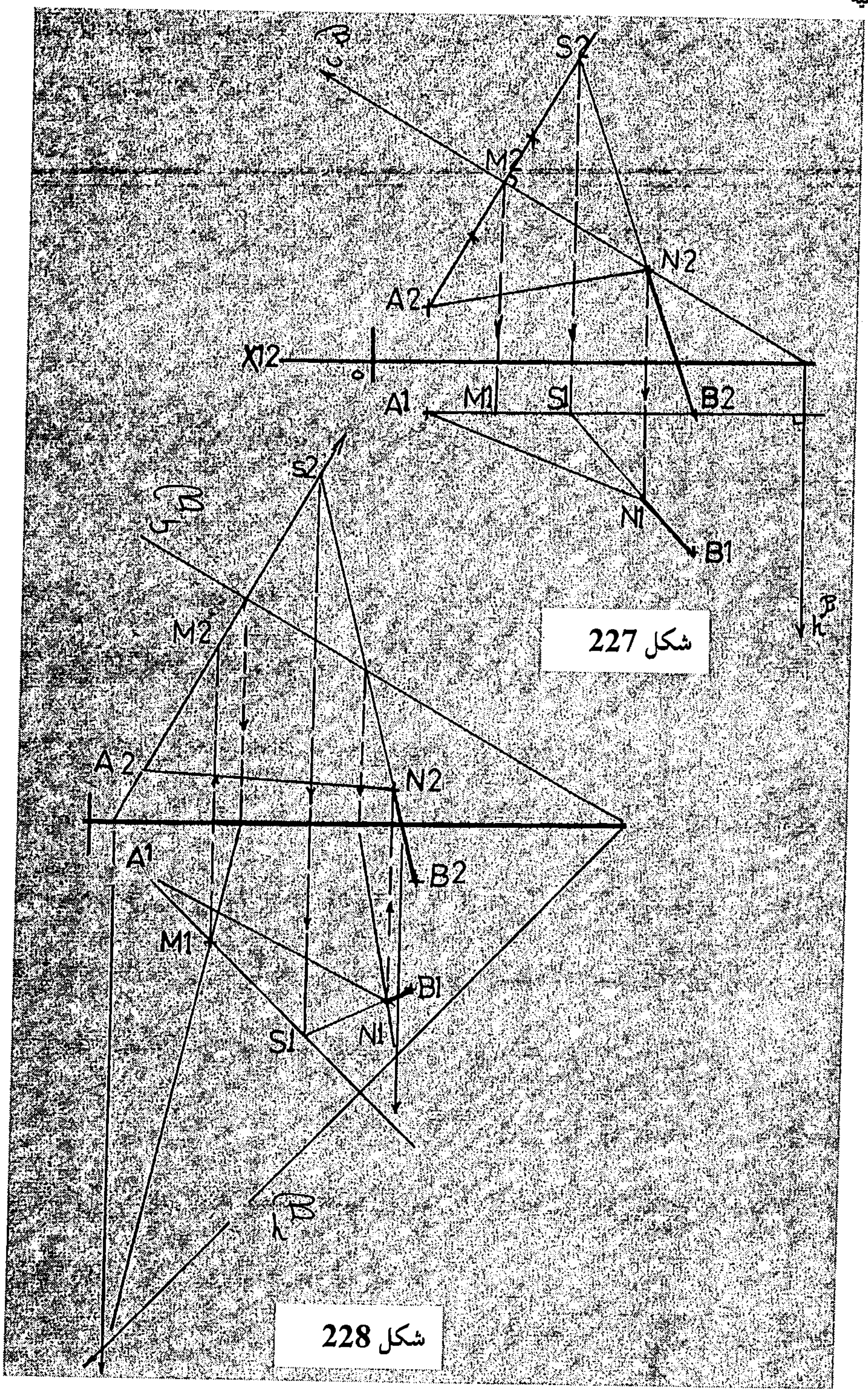
1- من نقطه A نسقط عمودى على المستوى β .

2- نوجد نقطه تقاطع العمودى مع المستوى β وهى نقطه M.

3- نوجد النقطه A' بالقياس المباشر من نقطه A على العمودى ونسميها مثلا S.

4- نصل نقطتى S,B فيكون هذا هو أقصر بعد بين S,B .

5- نوجد نقطه تقاطع SB مع المستوى β فتكون نقطه N.

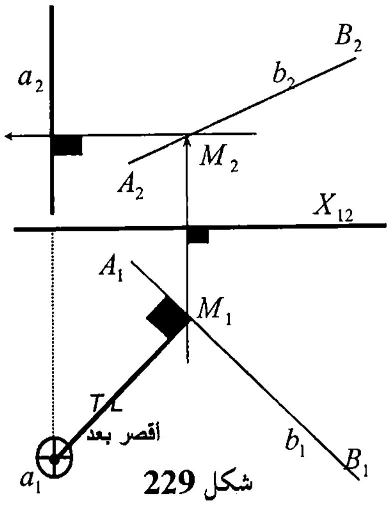


شكل 227

شكل 228

6- أقصر بعد هو AN+NB .

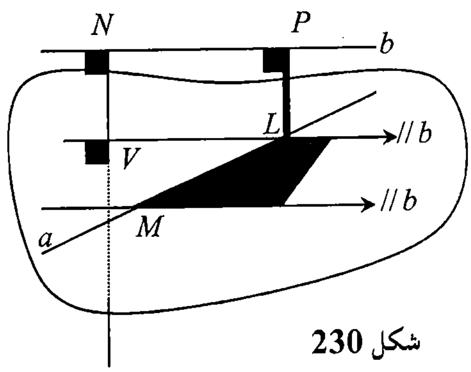
عين بإستخدام القياس أقصر بعد العمودي المشترك بين المستقيمين الشماليان [(, b[(A(5,1,4) B(10,4,6 و الثاني اذا كان أولا : a رأسيا [(6,5)]a ، ثانيا : a[(11,6,2) ,(7,0,3)]



شكل 229

الحل: أولا : هذه الحاله الأولى هي الحالة الخاصة

نجد أنه لو كان المستقيم a رأسي عمودى على π_1 فـإن مسقطة الأفقى نقطة كما بالشكل الموضح 229 ومسـقطة الرأسـى T.L. وبالتالى العمودى علىهذا المستقيم الرأسى a هـو مسـتقيم أفقى يوازى π_1 "العمودى على العمودى يكون موازى" وعلية فـإن مسقطة الرأسى يوازى خط الأرض ويظهر فى الأفقى T.L وبالتـالى يمكن رسم عمودى بين المستقيمين a, b حيث يتم رسم من المسقط الأفقى a_1 عمودى على b_1 حيث b_1 ليس T.L ولكن العمودى الذى سيتم رسمة هذة المرة هو الذى يكون طولة T.L لأنة عمودى على a_2 وبالتالى يكون مستقيم أفقى T.L شكل 229.وبذلك يكون ملخص الحل فىثلاثة أعمدة من مسقط المستقيم الأول a_1 وهو نقطة نرسم عمودى على المسقط للمستقيم الأخر b_1 يقطعة فى نقطة M_1 ومنـها نرسم عمودى على خط الأرض حتى يقطع المسقط الأخر لنفس المستقيم b_2 فنحصل على مسـقط نقطـة التقـاطع بالتناظر M_2 ومنها نرسم عمودى على المسقط الثانى a_2 للمستقيم الاول فنوجد نقطة على المستقيم الأخر ويكـون المحصور بين نقطتىالتقاطع هو أحد مساقط العمودى. والسؤال الأن هو: الحل المطروح تم تنفيذة عندما كـان أحـد المستقيمات a مسقطة نقطة ويتم بإسـتخدام الإسـقاط المساعد ويعتبر أسهل فى الإسلوب.



شكل 230

ثانيا :

الحل : المستوى ممثل بمستقيمين شماليين فى أوضاع عامه

1- من أي نقطة على المستقيم a وهي M نرسم

موازى للمستقيم **b** (فيشكل الموازى لـ**b** مع **a** مستوى) وهو α

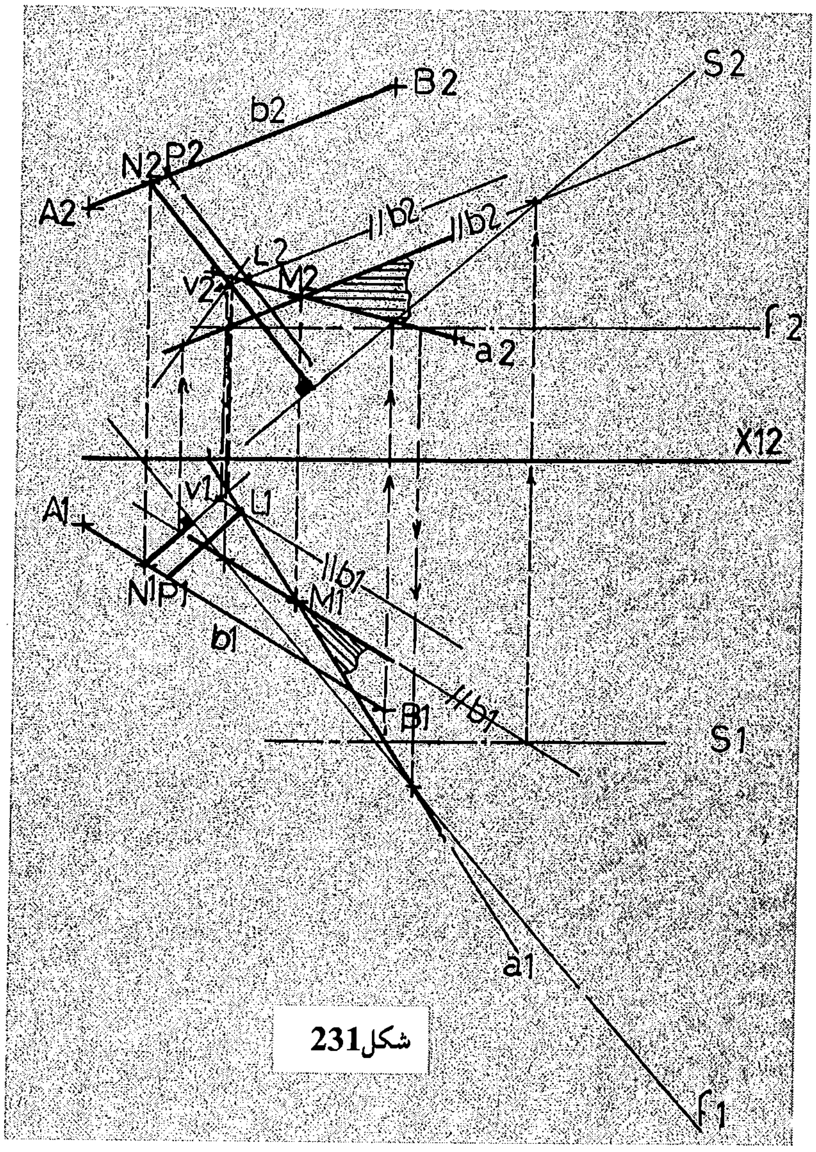
-2 من أي نقطة على **b** وهي مثلا **N** نرسم مستقيم عمودي على المستوى الجديد $\alpha =$ (**a+//b**) بالإستعانة بمستقيم أفقي ووجهي(واقعين فى المستوى) ليحددا إتجاه الأثار شكل **230**

-3 نوجد نقطه تقاطع العمودى مع المستوى α فيتقاطع معه في **V**

-4 من **V** نرسم موازى لـــ **b** فيقطع **a** نقطة **L** .

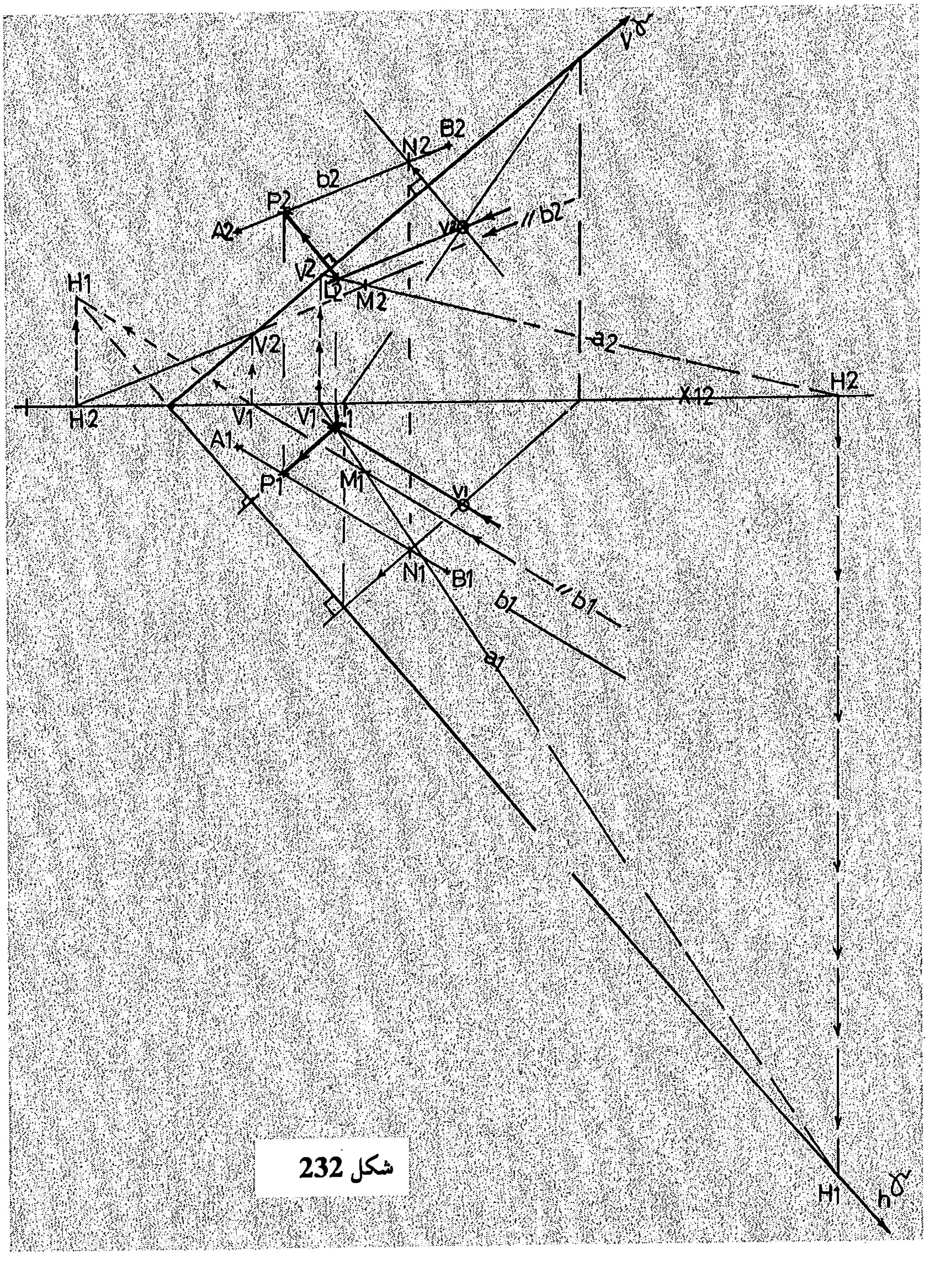
-5 من **L** نرسم عمودي (موازى ل **NV**) على نفس المستوى فيقطع **b** في **P**

-6 العمود المشترك (اقصر بعد) هو LP . شكل **230**و **231**و **232**



شكل**231**

ثانيا حل أخر بإستخدام أثرى المستوى



شكل 232

المعلوم ثلاث نقاط A(12,5,5 , B(8,2,1) , C(5,8,4) المطلوب اولا : تعيين المحل الهندسي – لنقطة في الفراغ متساوية البعد عن A,B,C ثانيا : تعيين نقطة N في المستوى α (0,135,30) بحيث تكون متساوية البعد عن A,B,C اذكر الحل الفراغي .

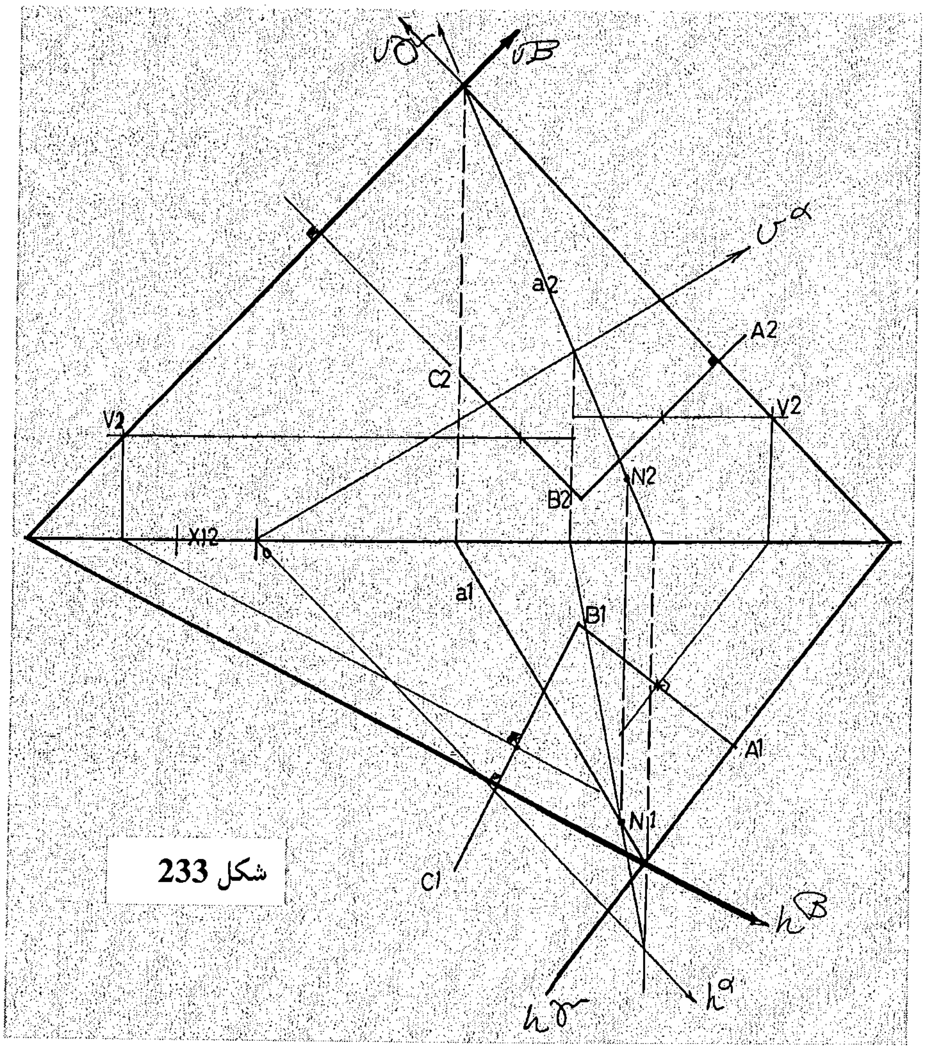
الحل الفراغي والوصفي: a– ننصف **AB** ونقيم من المنتصف مستوى γ عمودي على **AB**

b– ننصف**BC** ونقيم من المنتصف مستوى β عمودي على **BC** شكل **233**

c– يتقاطع المستويات β و γ العموديان في خط **a** , هذا الخط هو المحل الهندسي لجميع النقط المتساوية البعد عن

A,B,C .

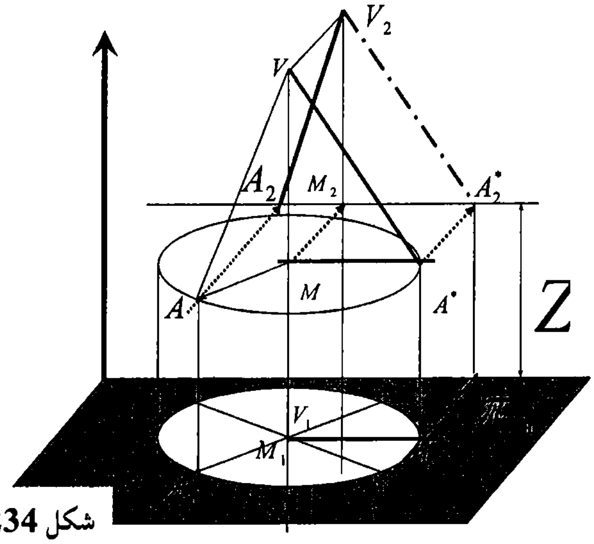
d– خط التقاطع **a** يتقاطع مع المستوى α في النقطة **N** شكل **233**. النقطة **N** هى النقطة المتساوية البعد عن ثلاث نقاط وهى التى تصلح أن تكون مركز كرة أو رأسى مخروط أو رأس هرم منتظم.



شكل 233

الدوران

<u>تعريف الدوران:</u> الدوران إما أن يكون دوران نقطة حول محور وهى أيضا دوران مستقيم حول محور، أو يكون لأحد المكونات العامة سواء لنقطة أو مستقيم أو مستوى ، ويتم بالصورة التى تجعله موازيا لأحد مستويات المسقط، حتى يظهر بشكله الحقيقى وبخواصه الهندسية كاملة. ويتم الدوران عامة للمستويات إما حول أثار المستوى أو حول أحد المستقيمات الأفقية أو الوجهية الواقعة فى المستوى كمحور دوران " محور يوازى أحد مستويات الإسقاط" والمطلوب إيجاد شكله الحقيقى أو وضع الأشياء فيه والمكونات داخله .

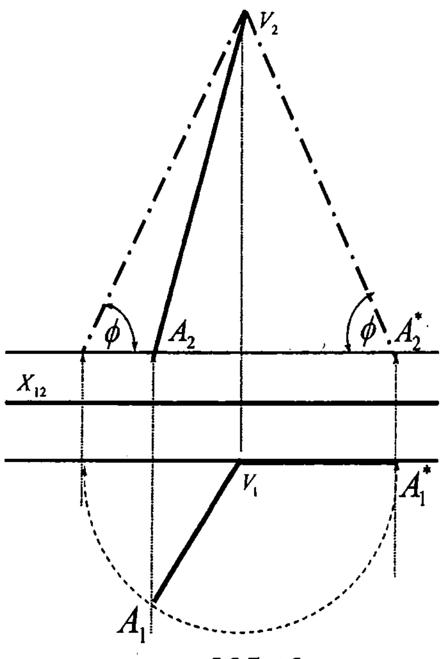


شكل 234

<u>دوران مستقيم حول محور (لإيجاد الطول الحقيقى وزاوية الميل)</u>

مثال: معلوم المستقيم VA أصنع دوران له حول المحور الرأسى شكل 234

الحل: يجب أن نعلم أن الدوران يتم للمستقيم بدوران أحد نهايتيه حول المحور بحيث يصبح موازى لمستوى المسقط الذى يوازى محور الدوران كما يتضح فى الشكل الفراغى شكل **234** لنقطة **A**، وبناء عليه يظهر المستقيم بطوله الحقيقى على المستوى الموازى. ولكى يتم الدوران تقوم نقطة نهاية المستقيم **A** بالدوران حول المحور فى مستوى يوازى المستوى العمودى على محور الدوران لكى تظل على نفس الإرتفاع فتصل إلى A^*، وبالتالى فإن دائرة الدوران تظهر بشكلها الحقيقى فى هذا المستوى الموازى، وتُسقط نقطة A^* على المستوى الرأسى فتكون A_2^* . وبالتالى يكون VA^* موازى للمستوى الوجهى ويظهر

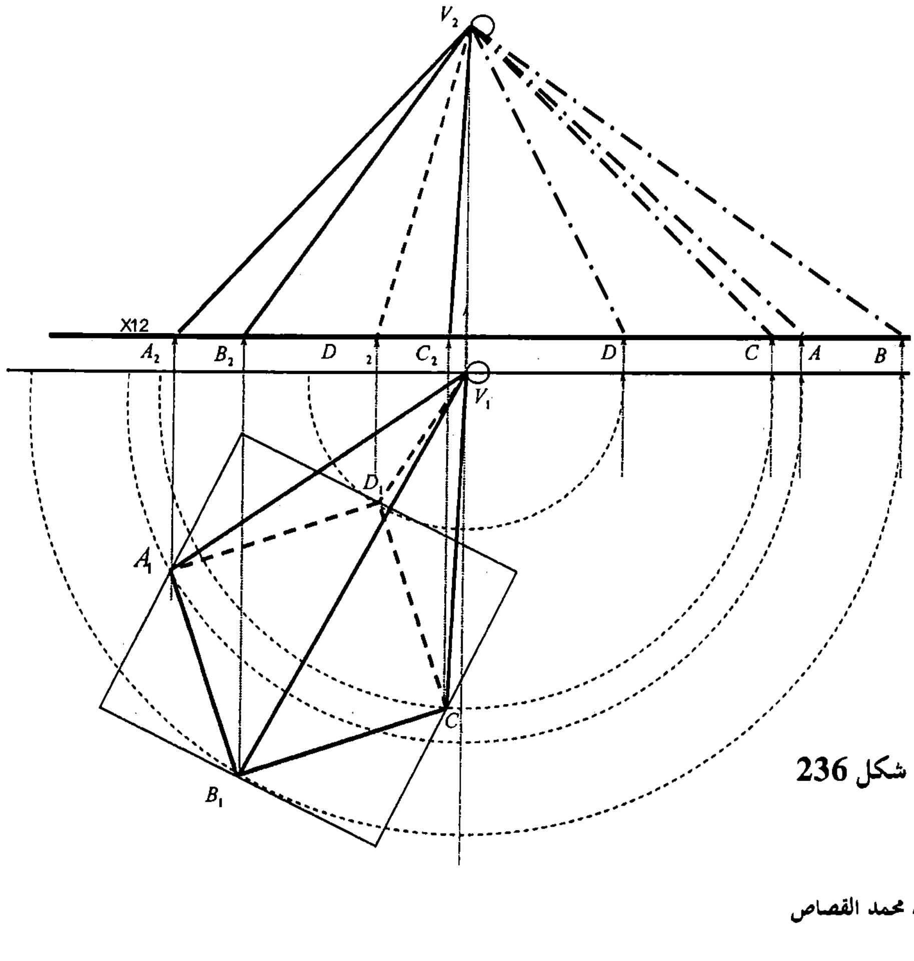


شكل 235

بطوله الحقيقى $V_2A_2^*$ فى المسقط الرأسى ومعه زاوية الميل . ويظهر ذلك فى التمثيل بالهندسة الوصفية فى شكل235 مباشرة لنقطة A حيث يتم دوران A_1 حتى تصبح موازية لخط الأرض عند الوضع A_1^* ثم نوجد المناظر لها على خط الأرض ثم على الخط الموازى لخط الأرض والمرسوم من نهاية المسقط الرأسى للنقطة التى تدور وهى A_2 فنحصل على المناظر لها بالدوران A_2^* ، نصلها بالرأسى V_2 التى تم الدوران بثبوتها فنحصل على الطول الحقيقى، وكذلك زاوية ميل المستقيم على المستوى الأفقى. ويمكن تكرار ذلك بالعكس على المستوى الرأسى فنحصل على زاوية ميل المستقيم على المستوى الرأسى.

مثال: أوجد الطول الحقيقى لأحرف الهرم المبينة بالمثال الموضح وزوايا ميله على المستوى الأفقى.

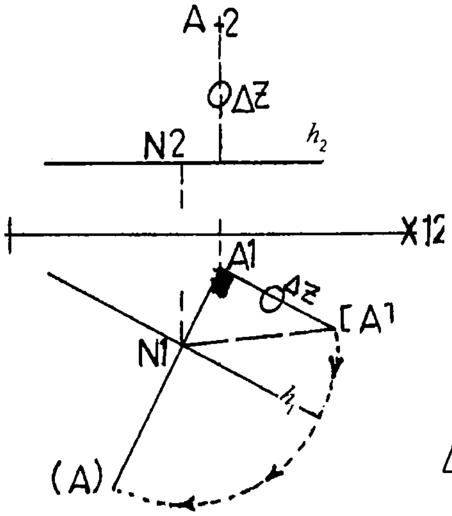
يتم دوران نهايات الأحرف A_1,B_1,C_1,D_1حول الرأس V_1 حتى تصبح فى الوضع الموازي لخط الأرض فنصعد بها على الموازى لخط الأرض والمرسوم من نهايات مساقط النقط الرأسية A_2,B_2,C_2,D_2 (وهذه المرة الموازى منطبق على خط الأرض لأن النقاط تقع فى المستوى الأفقى) فنحصل على النقاط A,B,C,D ثم نصلها بالمسقط الرأسى لرأس الهرم V_2 فنحصل على أطوال الأحرف الحقيقية وزوايا ميلها على المستوى الأفقى كما يتضح بالرسم فى شكل 236

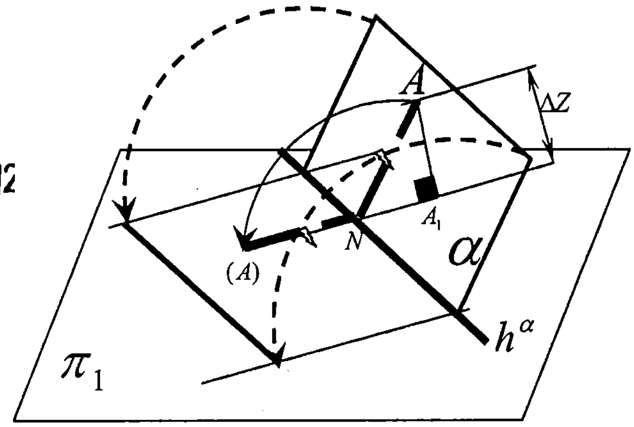


شكل 236

دوران نقطة حول محور يوازي أحد مستويى الإسقاط (حول مستقيم أفقي إو وجهي)

الدوران كما سبق الذكر يكون لأحد المكونات العامة سواء لنقطة أو مستقيم أو مستوى ، ويتم بالصورة التى تجعله موازيا لأحد مستويات المسقط، حتى يظهر بشكله الحقيقى وبخواصه الهندسية كاملة. ويتم الدوران عامة للمستويات إما حول أثار المستوى أو حول أحد المستقيمات الأفقية أو الوجهية الواقعة فى المستوى كمحور دوران " محور يوازى أحد مستويات الإسقاط" والمطلوب إيجاد شكله الحقيقى أو وضع الأشياء فيه والمكونات داخله شكل 237و شكل 238.





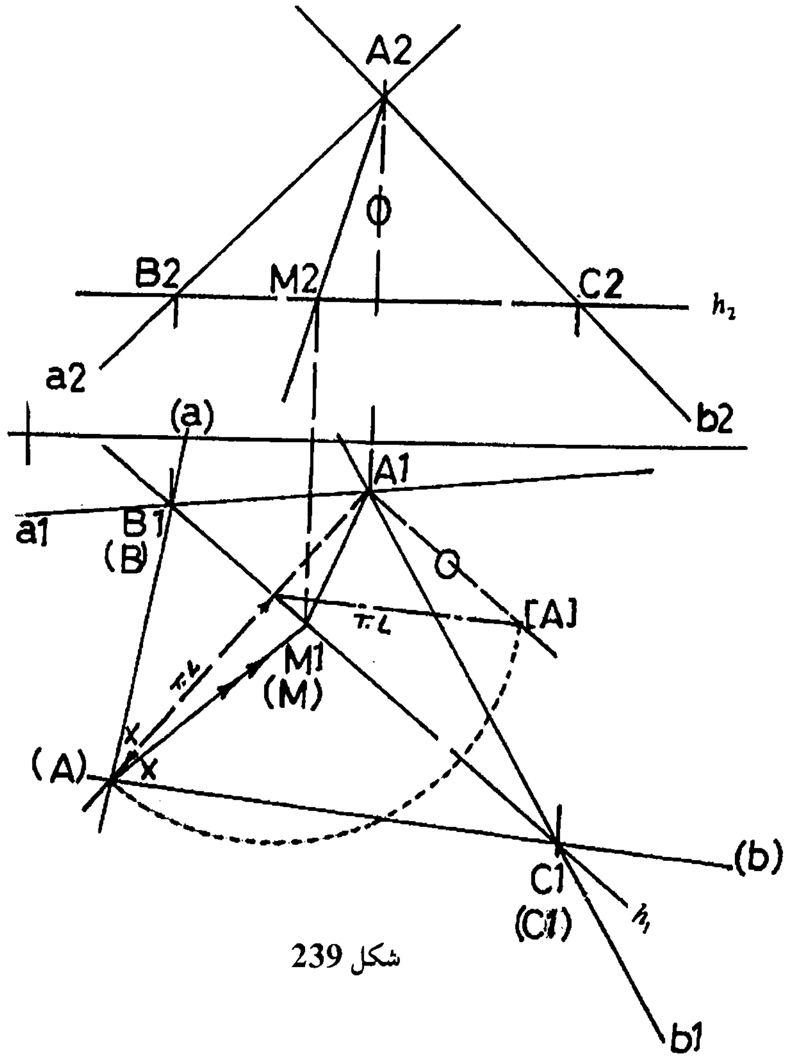
شكل 237

شكل 238

من شكل 238 دوران نقطة A حول مستقيم أفقى h يتم بأن نرسم من A_1 عمودي على محور الدوران h_1 وموازى له ونقيس على هذا الموازي المسافة ΔZ بين A_2, h_2 وبذلك نحصل على [A] وندور بالمسافة N_1[A] من N1 وهو طول محور الدوران و الطول الحقيقي لبعد A عن محور الدوران h_1 ونركز في N1 وندور نقطع العمودي من نقطه A في نقطة هي (A) حيث يصبح N_1[A] =N1(A).

<u>تطبيقات</u> : تشمل التطبيقات لدوران نقطة حول مستقيم أفقي أوجهي، إيجاد القيمة الحقيقية للزاوية بين مستقيمين وكذلك إيجاد زاوية ميل مستقيم على مستوى وإيجاد الزاوية بين مستويين، إيجاد الشكل الحقيقى لأى شكل هندسى،... .

مثال (1) : مثل الزاوية بين المستقيمين : الأول a يمر بنقطة (2,1,2) ومساقطه تميل 5^0 على π_1 ، 45 على π_2 ; والثاني b يمر بنقطة (8,6,2) ومساقطه تميل 120 على π_1 ، 135على π_2 . ثم مثل منصف الزاوية.



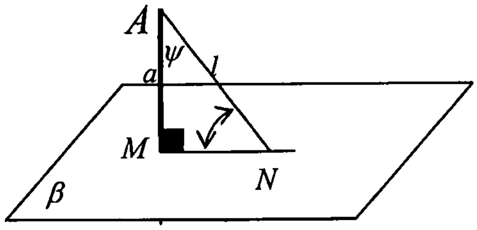
شكل 239

الحـــل: بعـــد توقيـــع المســـتقيمين a ,b يـــتم بتوليد مستقيم أفقـــىh وهو BC , حيـــث h_2 يـــوازى خـــط الارض وبالتالى نوجد B_2C_2 ثم B_1C_1 . نقوم بـــدوران a, b حول h1 بدوران نقطة A_1 حوله كمـــا تم سابقا . نحصـــل علـــى إمـــا النقطـــتين (A), (B),(C) وهما يقعـــان علـــى محـــور الـــدوران

شكل239 حيث موقعهم الأصلي يقع علية وليس لهم ΔZ ، ثم نصل النقطتين(C) (A) ,(B) (A) وبالتالى نحصل على الشكل الحقيقى لمستوى المستقيمين. وكذلك للحصول على الزاوية الحقيقية ننصف الزاويـــة بـــين المســـتقيمين ونوجد (M) تقاطع المنصف مع محور الدوران وهي نفسها M_1 لأنها تقع على محور على الدوران نعود بها h_2 فنوجد M_2 نصلها ب A_2 فيكون المسقط الرأسي للمنصف .

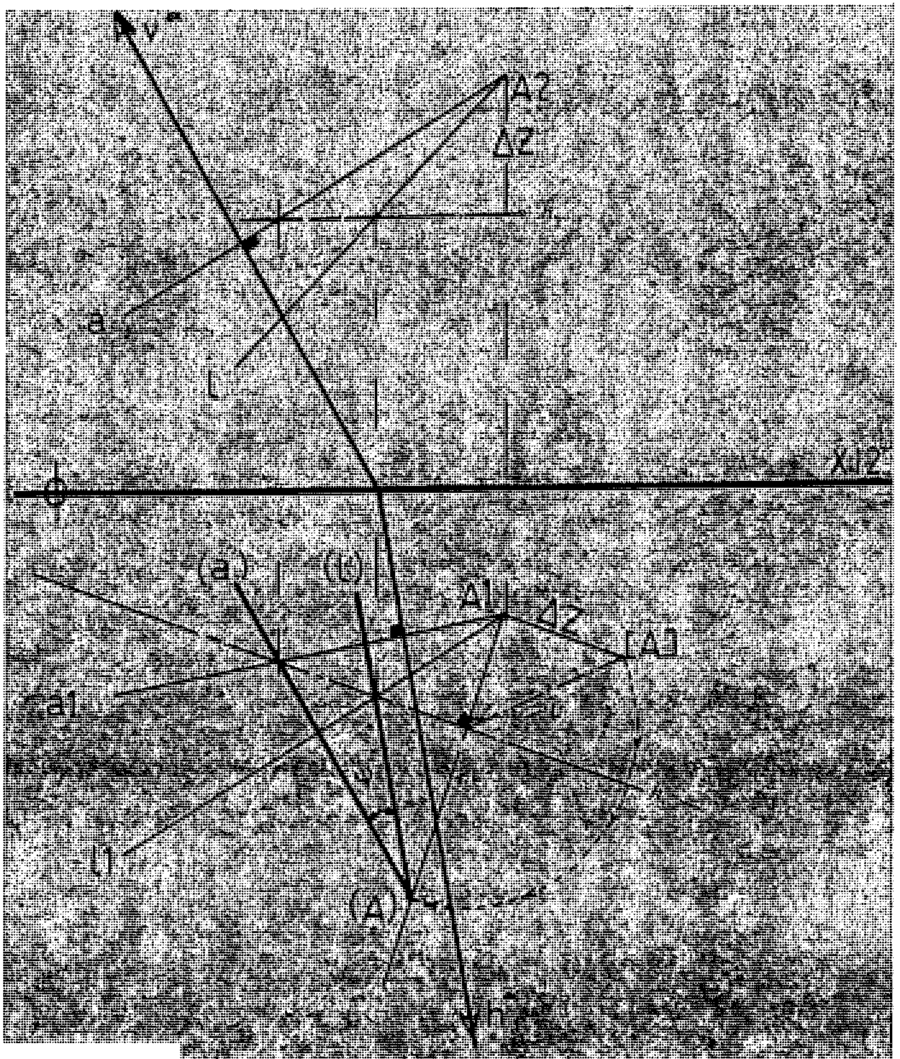
نتيجه: الخط الواصل بين مسقط اى نقطتين يقطع محور الدوران فى نقطه هى نفسها النقطه التى يقطع فيها الخط الواصل بين دوران النقطتين محور الدوران (مساقط النقطتين ودورانهما يكونوا شكل شبهه مخروطى حول محور الدوران).

عين زاوية ميل المستقيم e الذى يمر بالنقطة (3,6,2) ومساقطه تميل 30 على π_1 ، 45 على π_2 مع المستوى (5,100,120) α.

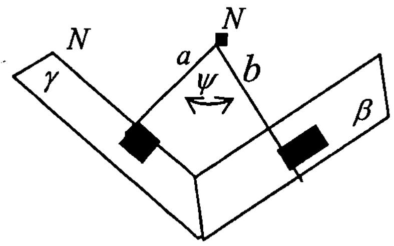


شكل 240

الحل: 1- نسقط من أى نقطة A على المستقيم l عمود على المستوى فيكون العمودى a . العمودى a مع المستقيم l يكونان مستوى ممثل بمستقيمين شكل 240 و 241 نستعين بمستقيم أفقي في مستوى المستقيمين a, l وندور النقطة A حول هذا المستقيم فنحصل على الزاوية ψ بين المستقيم و العمودى كزاوية حقيقية . الزاوية المطلوبة = $90-\psi$

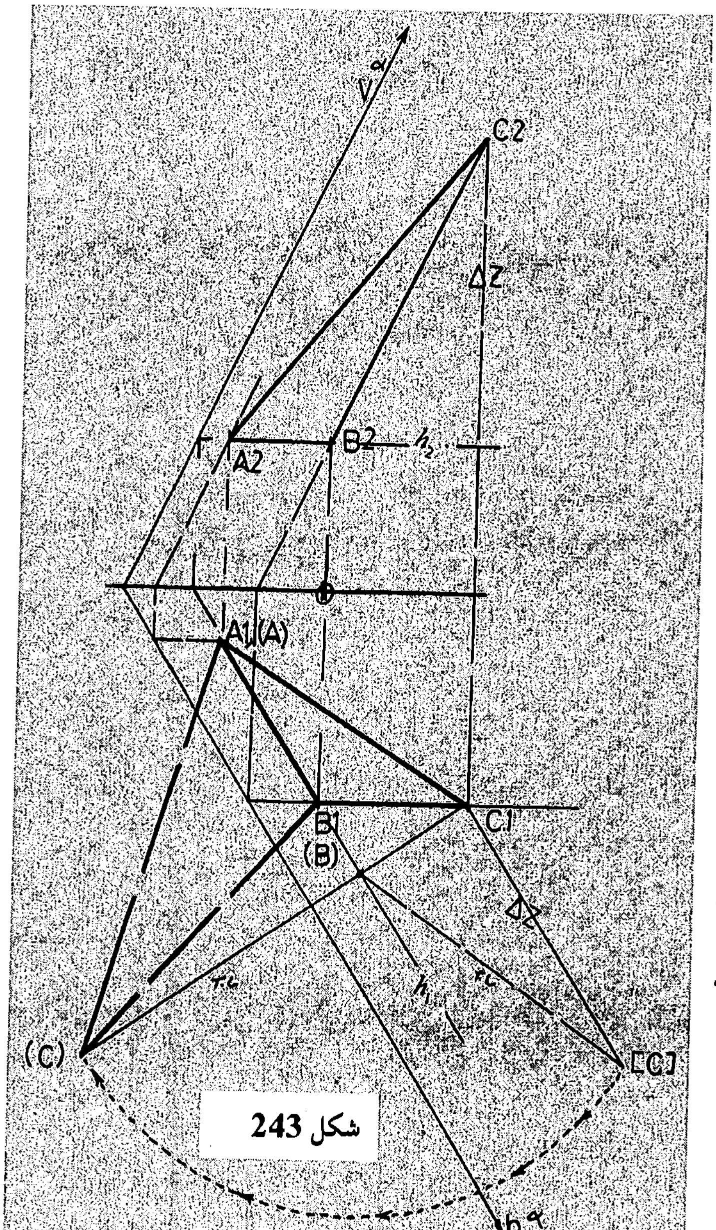


شكل 241



شكل 242

وبالمثل يمكن إيجاد الزاوية الزوجية بين أي مستويين شكل 242 وذلك بإختبار أي نقطة في الفراغ وإسقاط منها عمودي على كل مستوى a,b وبالتالى العمودين بينهما زاوية ψ ويكونوا مستوى، نختار في مستواهم مستقيم أفقي مثلا وتتم عملية الدوران ونوجد الزاوية بين العمودين ψ و الزاوية بين المستويين تكون 180 – ψ. وهذا المثال وماسبقه يعتبر مثال لدوران مستوى ممثل بمستقيمين وإيجاد شكله الحقيقي شكل ....

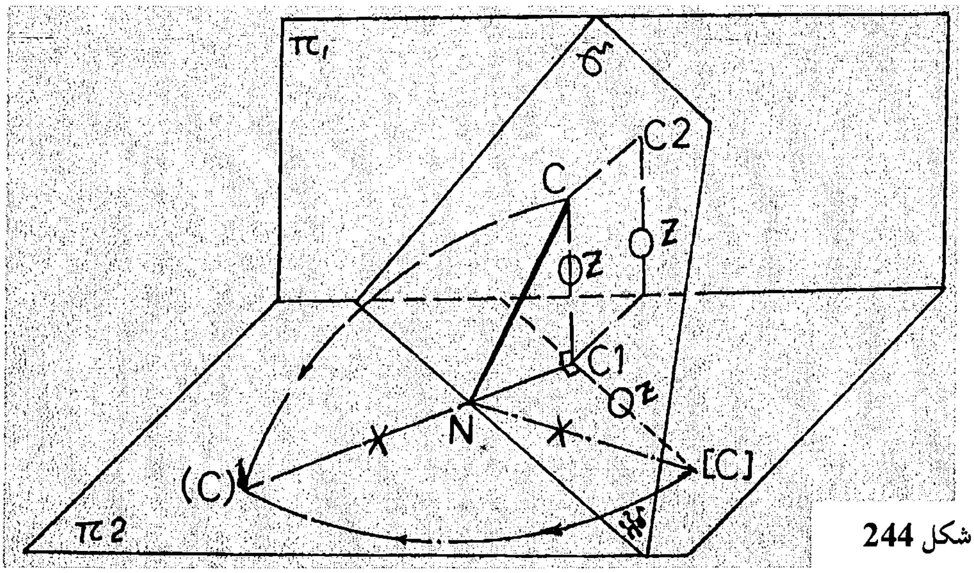


شكل 243

<u>مثال</u> الشكل الحقيقي للمثلث A(-2,1,?), B(0,4,?), C(3,4,?) الواقع في المستوى α (4,6,8)

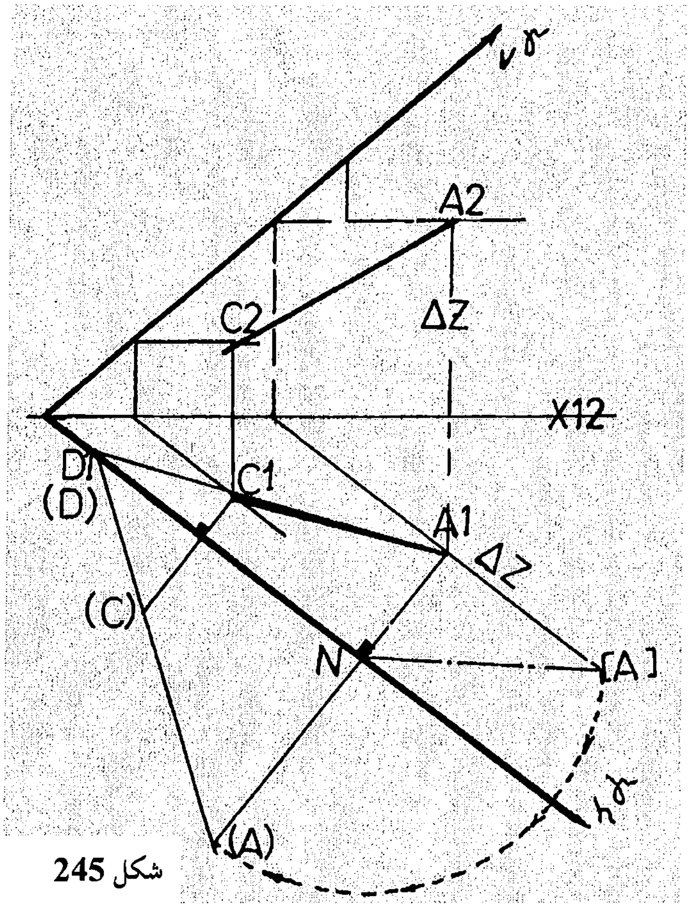
في الوضع العام نستعين بمستقيم أفقي ولكن حتي يسهل الحل فى هذه الحاله شكل 243 نمرر المستقيم بأحد رؤوس المثلث فتكون دوران أحد النقاط على مسقطها.

دوران المستوى حول أحد أثريه (دوران نقط المستوى حول أثره الأفقي آو أثره الرأسي)



شكل 244

دوران المستوى حول أحد أثريه يعني إنطباق المستوى على مستوى الإسقاط (الأفقى أو الرأسى) الذى يقع فيه الأثر. فالدوران حول الأثر الأفقي يعني إنطباق المستوى الموجود على المستوى الأفقي شكل 244، وكذلك بالنسبة للمستوى الرأسي يعني إنطباق المستوى الموجود على المستوى الرأسي وفي ذلك الإنطباق يظهر كل شيء في المستوى بطولة الحقيقي وزوايا ميله الحقيقية وشكله الحقيقى.



شكل 245

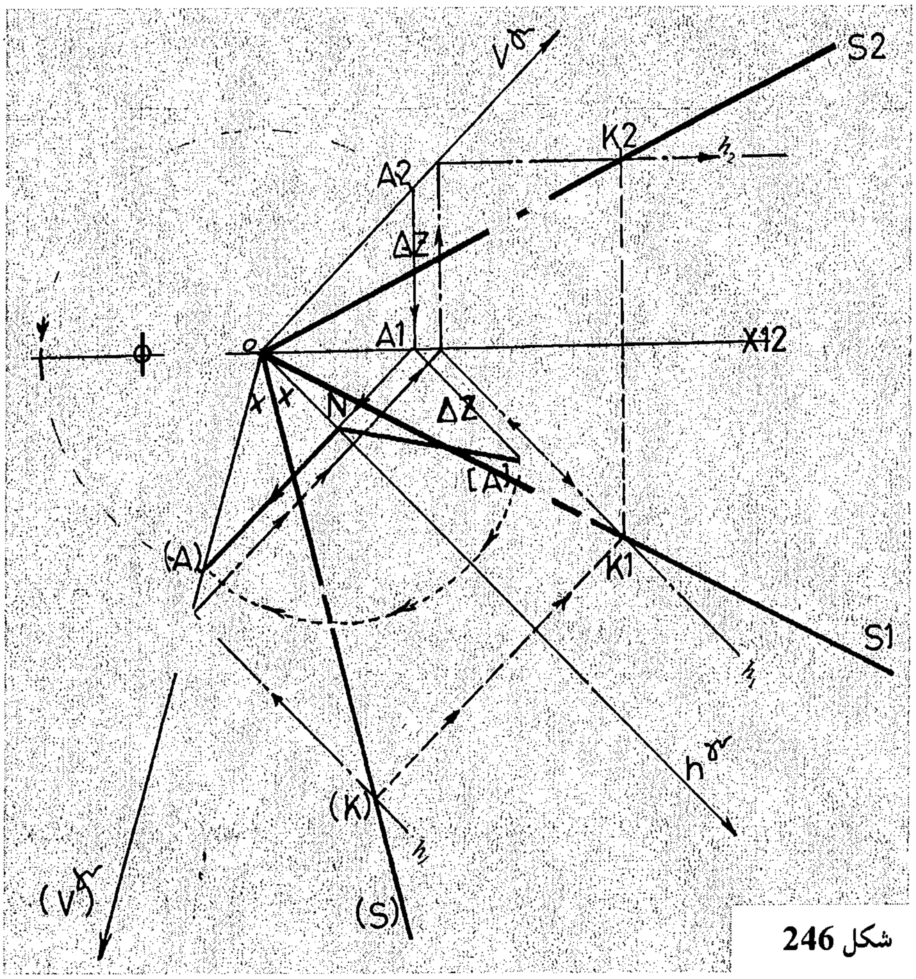
من شكل **244** للحصول على دوران نقطة **C** فى الشكل الموضح حول الأثر h^{γ} للمستوى نرسم مــن المسقط الأفقي للنقطة C_1 مثلا مستقيم عمودي على h^{γ} (محور الدوران) يلاقية في نقطة **N** وكذلك موازى للأثــر الأفقي ونقيس علية الأحداث ΔZ فنوجد **[C]** . نركز في النقطة **N** وبفتحه تساوى **N [C]** نقطع العمودي من C_1 في نقطة تكون هي (**C**) شكل**244** وقد وضح ذلك شكل الدوران فى الفراغ ، ونفس الشيء فى الاسقاط كما فى شكل **244**.

من شكل **245** فى التمثيل الوصفى للدوران، للحصول على دوران نقطة **A** فى الشكل الموضــح حــول الأثــر h^{γ} للمستوى نرسم من المسقط الأفقي للنقطة A_1 مستقيم عمودي على h^{γ} (محور الدوران) يلاقية في نقطة **N** وكذلك موازى للأثر الأفقي ونقيس علية الإحداثي ΔZ فنوجد **[A]** . نركز في النقطة **N** وبفتحه تساوى**N [A]** نقطع العمودي من **A1** في نقطة تكون هي (**A**) ونفس الشيء بالنسبة للنقطة **C** أو بالتألف . وتتضح الإستخدامات العديدة والأشكال المستنتجة بناء عليها من خلال باب كثيرات السطوح.

دوران المستوى حول أحد أثريه : (يستخدم في إيجاد الزاوية بين أثري المستوى)

مثال : اوجد المنصف والقيمة الحقيقية للزاوية بين أثري المستوى γ (2,135,45)

الفكره العامه تكمن فى دوران المستوى حول أثره الأفقى لينطبق على المستوى الأفقى (ويتم ذلك بدوران أى نقطة على الأثر الرأسى ومعها رأس المستوى) وبالتالى يظهر بشكله الحقيقى على المستوى الأفقى ولكن بعد الدوران. فى شكل **246** يتم دوران أحدي النقاط مثل **A** واقعة على الأثر الرأسي نحصل لها على**[A]** ثم على (**A**) وبالتالي نصل نقطه **O** بنقطه (**A**) يكون هو (V^{γ}) وتظهر الزاوية الحقيقيه بين أثرى المستوى بين h^{γ} و (V^{γ}) و المنصف لها هو الخط (**S**) ولإيجاد مساقطه S_2,S_1 نستعين بمستقيم أفقي (**h**) حيث مسقطه فى الدوران موازى للأثر الأفقي في الدوران وكذلك عندما نعود به نجدة يوازى الأثر الأفقي في الموضع العام بالتالي (**h**) و h_1 موازيين h^{γ} وعلية نأخذ أي نقطــة (**k**) على (**S**) ونرسم منها (**h**) ونعود به فنوجد به فنوجد h_1 حسب الأسهم المشار إليها على (**h**) . ونعود من (**k**) عمودى على h^{γ} فيتقاطع مع h_1 في k_1 وتنقلها رأسيا نحصل على **k2** . نصـــل Ok_1، Ok_2 فيكــون همـــا s_1،s_2 المسقطين للمنصف للزواية شكل **246**.



شكل 246

التألف بين مسقط شكل وإنطباقه :

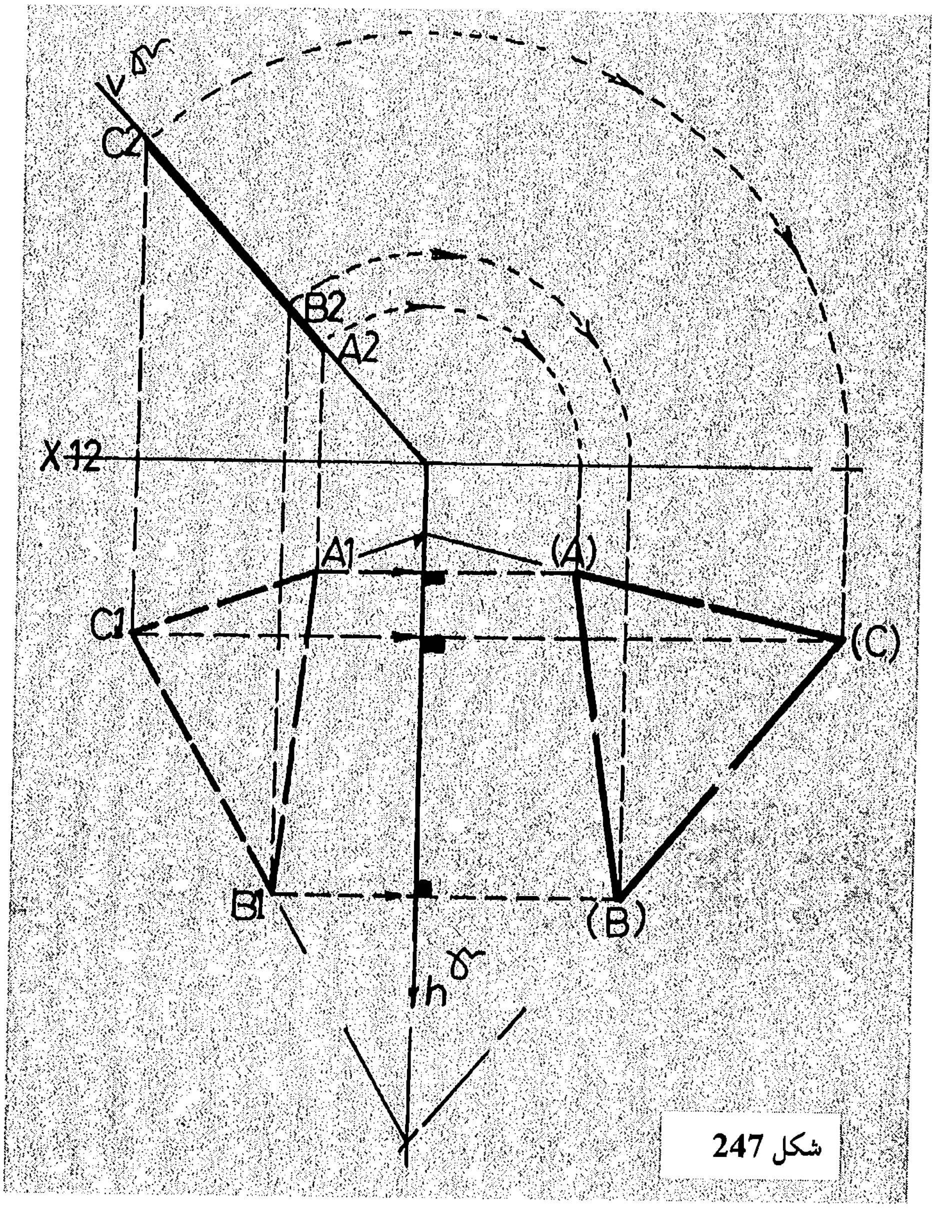
بين شكل أي مستوى وإنطباقه على مستوى الإسقاط علاقة تناظر تسمي التألف المتوازى العمودي وأهم خواصها :

1. كل نقطة فى المسقط مثل A_1 يناظرها في الإنطباق (A) وبالعكس شكل 247

2. كل مستقيم في المسقط مثل A_1C_1 يناظره مستقيم في الإنطباق هو $(A)(C)$ والعكس شكل 247 .

3. الخطوط التى تصل كل نقطة ودورانها مثل $c_1,(c_1)$ عمودية على محور الدوران وكذلك بالنسبه لكل النقاط التى يتم الدوران لها فى المستوى شكل247

4. كل مستقيمين متناظرين يتقابلان في نقطة مشتركة على محور الدوران مثل $(A)(C)$,A_1C_1. وعلى ذلــك نجد ان المستقيمات المتوازية التى لا تتقاطع مع محورالدوران تكون ايضا متوازية في الإنطباق كما انه اذا وازى مستقيم محور دوران أى كان وضع محور الدوران (محور التالف) فان إنطباقه يكون أيضا موازيا لهذا المحــور كما ذكرنا في الشرح في المثال السابق شكل247

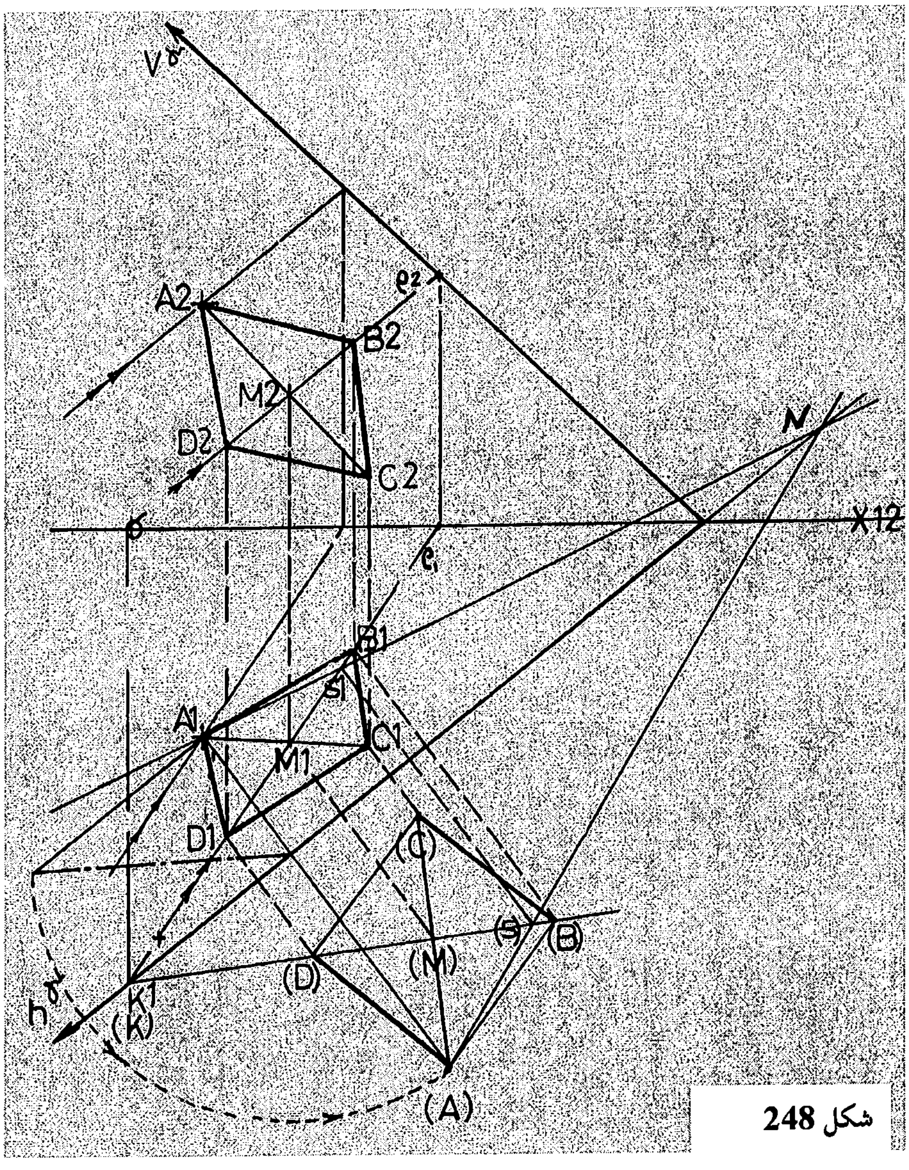


شكل 247

مثال :- مثل مسقطي المربع ABCD الذى رأسه (A(1,2,3.5) و القطر BD يقع على المستقيم [e [(0.5,6.5,0.5),(5.0,4) .

الحل: يتم اولا رسم موازى للمستقيم *e* من النقطة A الذى رأسه (A(1,2,3.5) و القطر BD يقع على المستقيم

[(5.0,4) , (0.5,6.5,0.5)] e . شكل 248



شكل 248

1. يتم رسم موازي للمستقيم *e* من النقطة A ومن النقطه والمستقيم نوجد أثار المستوى الذى يحويهم .

2. يتم عمل دوران للنقطة A_1 فنأتي بـ (A) نذهب للمستوى الأفقي حيث نختار نقطة مثل S1 على المستقيم e_1 ونوصلها بـ A1 فيتقاطع مع الأثر الأفقي"محور الدوران" للمستوى في نقطةN. شكل 248

3. نصل N بـــ (A) وعلى هذا الخط الناتج خط التالف فنسقط عمودى من S1 فنحصل على (S) نقطة علـــى المستقيم e_1 المحل الهندسى للقطر نصلها بنقطة K الواقعة هى الأخرى على القطر فيكون (S) (K) هو المحل الهندسي للقطر الحقيقي

4. نسقط عمودى من (A) على (S), (K) فينتج (A) (M) كنصف قطر ونمده نحصل على (C) وكذلك بالقياس نحصل على (B), (D) نعود بـــ (M) نحصل على M1 وكذلك B1,D1 ونصل M1A1 فنحصل على C1 و بالرجوع للمستوى الرأسي نحصل على جميع النقاط .

عامة: يستخدم الدوران للمستويات إذا كان الحل يعتمد على الخصائص الهندسية للشكل المطلوب ولتحقيق ذلك يتم الحصول على الشكل الحقيقى بالدوران.

تمارين القــياس

1- مثل العمود m الساقط من نقطة N(2,2,3) على المستوى α إذا كان :

أولا : α رأسي α(6 ،60)

ثانيا : α (7 ،45 ،120)

2- في المسألة رقم (1) عين بعد النقطة N عن المستوى α .

3- مثل المستوى β العمودي على المستقيم b من نقطة N(6,1,2) حيث :

b [A(2,2,2) , B($6\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}4$ ، $6\frac{1}{2}$)]

4- في المسألة رقم (3) عين بعد النقطة N عن المستقيم b .

5- عين الزاوية الزوجية بين المستويين α (A(3,2,8) ,B(5,1,4) , N(8,5,4)

β (A, B, L(1,6,3)

6-عين بعد نقطة N(3,2,2) عن مستقيم m ، إذا كان :

أولا : m مستقيما وجهيا يمر بنقطة (4,4,4) ويميل 135 على π_1 .

ثانيا : m(7,1,2) , (2,5,6) .

7- المعلوم ABC حيث . A(3,1,1) , B(6,4,5) , C(0,1,0) ونقطة N(4,5,3) خارجة عنه و المطلــوب تعيين الطول الحقيقي و المسقطين للعمود m من نقطة N على مستوى سطح المثلث .

8-المعلوم المستوى α (0,30,120) و الطلوب تعيين مستوى β عمودي على المستوى ويميل 45 على π_1 .

9- المعلوم مستقيم أفقي h يمر بنقطة B(7,1,3) ويميل 45 على π_2 و المطلوب تمثيل نقطة N تبعد 3 سم عن h إذا علمت : أولا : N1 (4,1,?) ثانيا : N2 (5,4.5,?)

10- عين أقصر بعد والعمود المشترك بين مستقيمين شماليين أحدهما a(A5,1,4) , B(10,4,6)

و الثاني b إذا كان : أولا : b رأسيا b(6,5) . ثانيا : b [(11,6,2) ,(7,0,3)]

ثالثا : b وجهيا يمر بنقطة N(11,6,2) ويميل 150 على π_1 .

11– مثل المثلث ABC المتساوي الساقين الذى فية AC = AB ، C(3,4,4) , A(x,6,5), B(7,2,1) .

12– مثل المعين ABCD معلوم منه A(8,3,4), B(5,5,7) إذا فرض أن B_1C_1, B_2C_2 يصنعان على الترتيب

60 ،135 مع X12 .

13– المعلوم ثلاثة نقاط A(12,5,5) , B(8,2,1), C(5,8,4) و المطلوب

أولا : تعيين المحل الهندسي لنقط الفراغ المتساوية البعد عن A,B,C .

ثانيا : تعيين نقطة N في المستوى α (30 ،0,135) بحيث تكون متساوية البعد عن C,B,A ، أذكـر الحـل

الفراغي ثم مثل بالإسقاط .

الباب التاسع

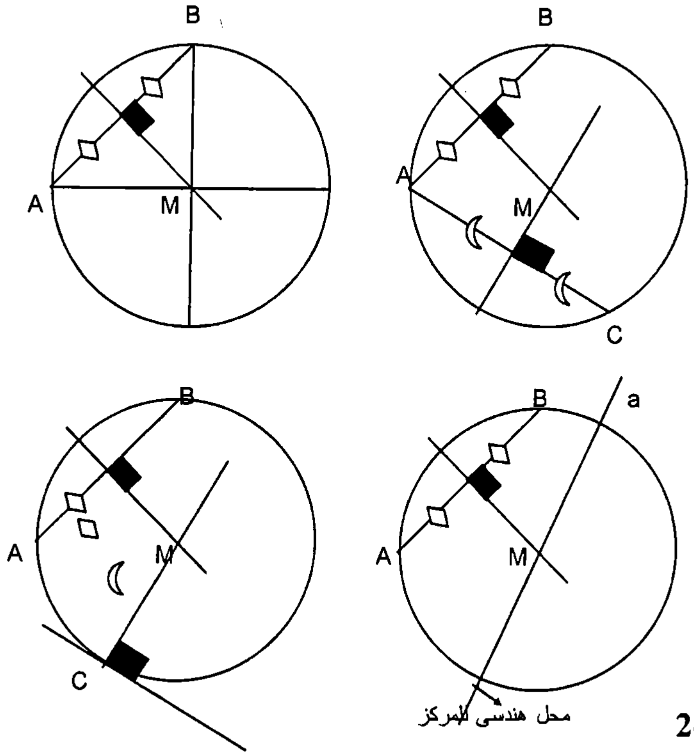
الدائرة

الدائـرة

رجاء عند قراءة هذا الباب أن تستمر فى القراءة حتى تصل لأول تمرينين محلولين حتى تستطيع إستيعاب الموضوع بسهوله حيث أن هذا الباب مشروح بإسلوب وضحت فيه الخلاصه جلية وفيه تتعلم إسلوب التفكير فى الموضوع جيدا.

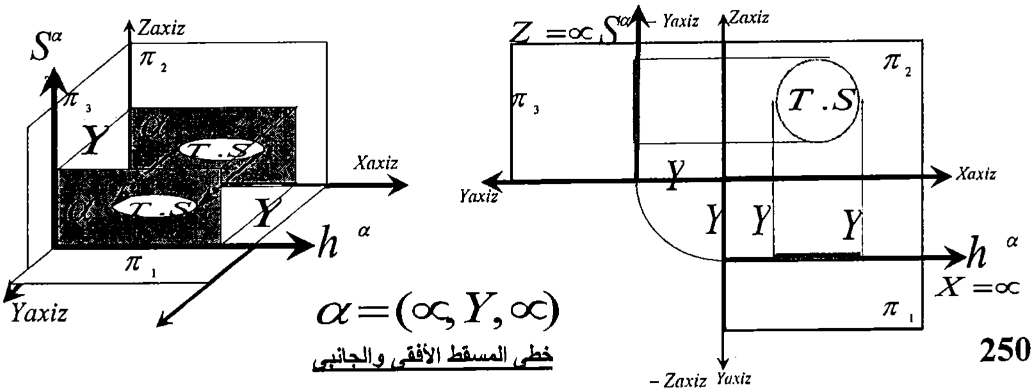
تعريف الدائرة فى الهندسة المستويه

الدائرة هى المحل الهندسى لجميع النقاط التى تبعد مسافه ثابته r عن نقطه وأحده وهى مركز الدائرة M وتمتاز الدائرة بخواص عديدة فى الهندسة المستويه شكل 249. أى نقطتين على الدائرة الخط الواصل بينهما يسمى الوتر مالم يمر بالمركز، الذى إذا ماأقمنا من منتصفه عمود يكون المحل الهندسى للمركز. أى مستقيم يمر بالمركز فهو قطر ينصف الدائرة لنصفين متماثلين وأى مثلث يقام فى منتصف الدائرة وتره القطر يكون قائم الزاوية فى النقطة الموجودة على سطح الدائرة " وعليه فإن القطر محل هندسى للمركز". أى ثلاث نقاط على سطح الدائرة تشكل مثلث، بمجرد تنصيف أى وترين وإقامة أعمدة من منتصفهم، تكون الأعمدة محل هندسى للمركز، وكذلك أى مماس للدائرة لو تم إقامة عمودى عليه من نقطة التماس يكون محل هندسى للمركز، ووجود أى محلين للمركز سيتقاطعا معا فى حل وحيد هو المركز.

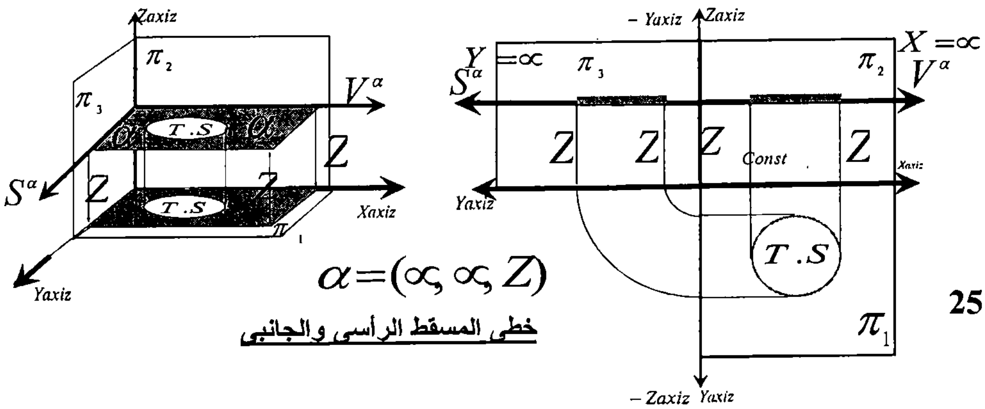


شكل 249

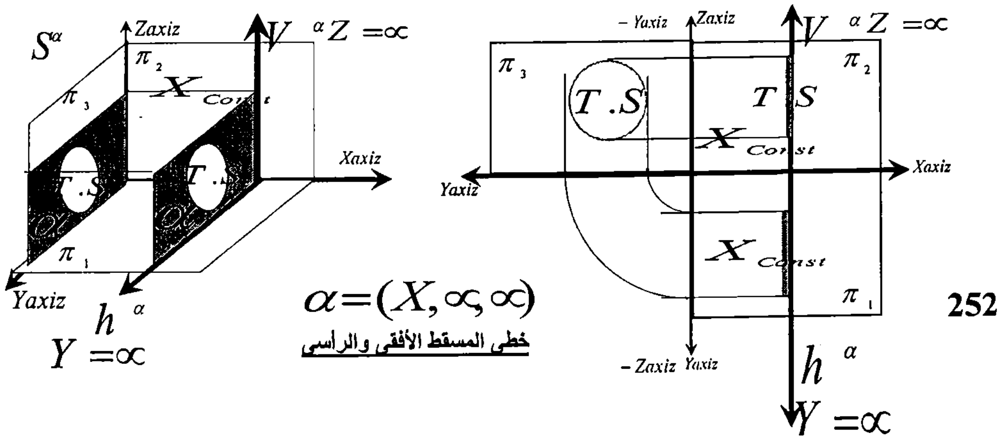
إسقاط الدائرة مثل كل الاجسام يظهر مسقطها بشكله الحقيقى فى أحد مستويات الإسقاط وذلك إذا كانت تقـــع فى مستوى يوازى مستوى الإسقاط كما فى الثلاثة أشكال الموضحة 250و 251و 252 وفى هذه الحاله فإنها تظهر خط فى المستويين الأخرين لأن المستوى الذى يوازى أحد مستويات الإسقاط يكون عمودى على الأخرين أى خطى المسقط عليهما كما هو واضح فى هذه الاشكال.



شكل 250

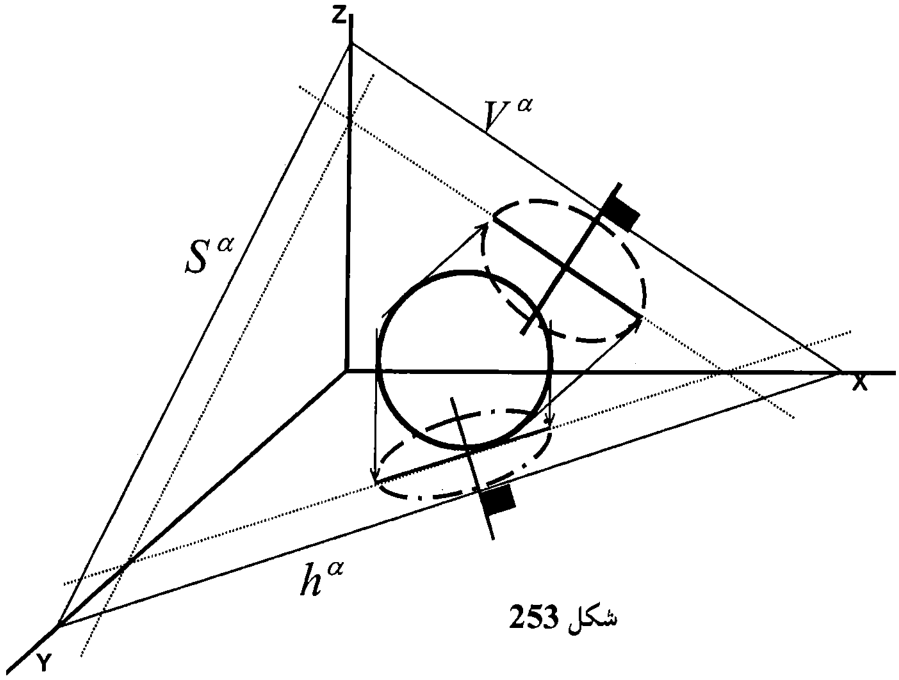


شكل 251



شكل 252

أما إذا كانت الدائرة واقعة فى مستوى عام فإن لها مسقط على المستويات يختلف عن شكلها الحقيقى وهـــو مايســـمى بالقطع الناقص "محور أكبر ومحور أصغر" كما يتضح فى الشكل 253 فى إسقاط الدائرة الواقعه فى المستوى α كقطع ناقص فى كل من المسقط الأفقى والرأسى.



شكل 253

كيف تفكر فى التعامل مع طبيعة الدائرة

ولقد رأيت أن أبدأ شرح هذا الباب بملخص عام والذى يمكن أن يؤهل المدرس والطالب مباشرة بـــالتفكير بطريقـــة واضحة تبين ماهو المطلوب لرسم الدائرة فى فى الهندسة الوصفية. وكما إستفدنا من خبرات السابقين فإنه يمكن تلخيص مشكلة الدائرة فى الأتى: الدائرة هى ثلاثة اشياء M –و r –و أثا ر . والمواصفات العامة لهذه الثلاثة هى كالأتى:

- $\underline{M}$ هو مركز الدائرة ولإيجاد المركز يتم التعامل مع المشكله على إنها مشكلة هندسة مستوية أو هندســة فراغية كحل جانبى لرؤية ماهى العمليات الهندسية المطلوبة لإستنتاج المركز. فإذا كان الحل فى الهندسة المستوية لإستكمال رسم الدائرة يستلزم عمل عمود وأحد على مستقيم "سواء كان هذا المستقيم وتر معطى ســنقيم عمود من منتصفه ، أو مماس سنقيم عليه عمود من نقطة التماس" هذا يعنى أن نستخدم الإســقاط المســاعد للمستقيم لإيجاد الطول الحقيقى لهذا المستقيم وإقامة الأعمدة عليه وإستنتاج المركز. وإذا كان الحل فى الهندسة

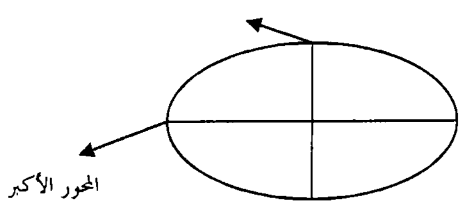
المستوية يتطلب عمل أكثر من عمود فإن هذا يعنى أن نلجأ إلى ال T.S الشكل الحقيقى لمكونات مستوى الدائرة لإيجاد المركز (المستوى الذى يحتوى الدائرة –سواء كان معلوم بأثاره– أو بنقطة ومستقيم– أو بثلاث نقاط) ومعه فى بعض الأحيان نصف القطر. وفى الغالب طالما المركز مجهول فى التمرين تعرف أنه لابد أن تذهب للشكل الحقيقى للمستوى لإستغلال الخواص الهندسيه للدائرة فى إقامة الأعمدة وقياس الأطوال.

- r يستنتج نصف القطر من الخصائص الناتجه فى الحل بالهندسة المستوية ومواصفات المعطيات وفى الغالب يستنتج فى الشكل الحقيقى T.S.
- الأثار: عند التعامل مع التمارين لابد أن يتوافر أولا مستوى الدائرة بالمكونات المعطاة التى تتلخص فى أن يكون المستوى مكون من ثلاث نقاط، أو نقطة ومستقيم، أو مستقيمين متوازيين أو متقاطعين، أو بالأثار. فإذا كانت مكونات المستوى غير موجودة فإنه يتم تحليل المشكلة من خلال معطياتها لإيجاد العمليه المطلوبه لإتمام إيجاد مكونات المستوى حتى يمكن معالجته بعد ذلك لإيجاد شكلها الحقيقى أو مساقطها.

لكى ترسم دائرة فى مساقطها الأفقية والرأسية لابد أن تتوافر هذه الثلاثه M – و r –و أثا ر ، وإذا ما توفرت هذه الثلاثة بإستخدام أدوات الحل بالهندسة المستوية ثم أدوات الهندسة الوصفية سواء كان مستوى أو موضع أو إسقاط مساعد يبقى التمثيل الوصفى للدائرة فى المسقط الرأسى والأفقى وبالتالى لابد من معرفة خواص الإسقاط للدائرة فى المسقط الرأسى والأفقى حتى يمكن تمثيلها.

التمثيل الوصفى للدائرة فى المسقط الرأسى والأفقى

نلاحظ أن الدائرة يتم إسقاطها فى كل من المستويين كقطع ناقص، والقطع الناقص له محور أكبر ومحور أصغر شكل 254. وبالتالى يجب أن نعلم مواصفات المحور الأكبر وكذلك المحور الأصغر داخل مستوى الدائرة وكيفية إستنتاجهما ثم فى النهاية كيفيه رسم القطع الناقص



شكل 254

لإستكمال الشكل العام للإسقاط. لذلك سيتم عرض الأن مباشرة ملخص المتطلبات العامه لرسم الدائرة كشكل مسقط

دائرة وخواصها والتى يمكن لأى طالب الإعتماد عليها مباشرة لحل جميع التمارين سواء كان فى إسلوب التفكير أو فى الرسم العام وتحقيق خواص الهندسة الوصفية فى إسقاط الدائرة. وعليه فإنه بمجرد توافر الثلاثه أشياء اللازمة لرسم الدائرة M -و r - و أثار فإن المتطلبات والمواصفات العامة المطلوبه لرسم الدائرة هى كالأتى:

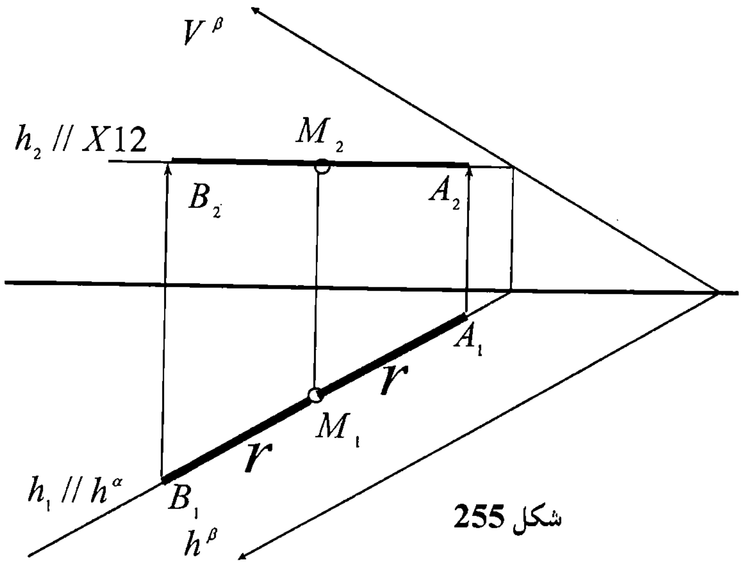
1. **المحور الأكبر** : مواصفاته هى ; يوازى الأثار ويساوى $2r$. والمحور الأكبر فى المستوى الأفقى ليس له علاقة بالمحور الأكبر فى المستوى الرأسى .(المحور الأكبر فوق ليس له علاقة بالمحور الأكبر تحت).
2. **المحور الأصغر** : مواصفاته هى; عمودى على الأثار وطوله يستنتج بأحدى الطرق التى سيتم ذكرها لاحقا (وإن كنت أفضل إستنتاجه بطريقة خطى المسقط لسهولة إستخدامها فى التطبيقات اللاحقة وخاصة مع الكرة).

التفسير الوصفى لإسقاط المحور الأكبر فى الدائرة

فى المسقط الأفقى

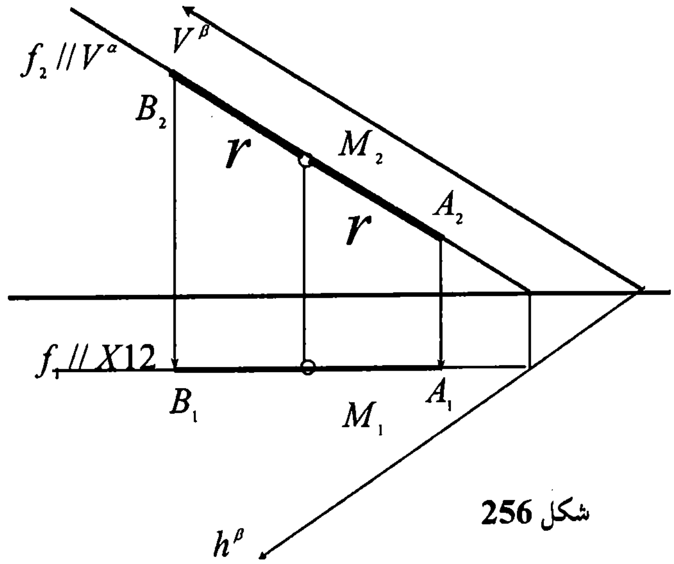
نحن نعلم أن الإسقاط يتم للأجسام من نهايات أبعادها أو أقصى أبعاد لها ولذلك عندما نُسقط دائرة كما هو معتاد سنبحث عن كيفية إسقاط القطرين المتعامدين داخل الدائرة.

نلاحظ أن أقصى طول يمكن أن يكون فى المسقط الأفقى هى لمستقيم أفقى بطولة الحقيقى وبالتالى داخل أى دائرة سيكون أحد الأقطار هو مستقيم أفقى لأنه يحقق أقصى بعد فى إتجاة الإسقاط على المستوى الأفقى وعلية سيكون مسقط هذا المستقيم الأفقى هو المحور الأكبر



شكل 255

والمركز فى منتصفه لأنه يسأوى قطر الدائرة الحقيقى 2r شكل 255 أما هذا المحور الأكبر فإن مسقطه الرأسـى هـو نقطتان عاديتان واقعتان علىمسقط محيط الدائرة الرأسى وهو مسقط رأسى لمستقيم أفقى يوازى خط الأرض وأقصى طول لة هو مايوازى *إسقاط أقصى نقاط للمحور الأكبر التى ظهرت فى المستوى الأفقى* شكل 255



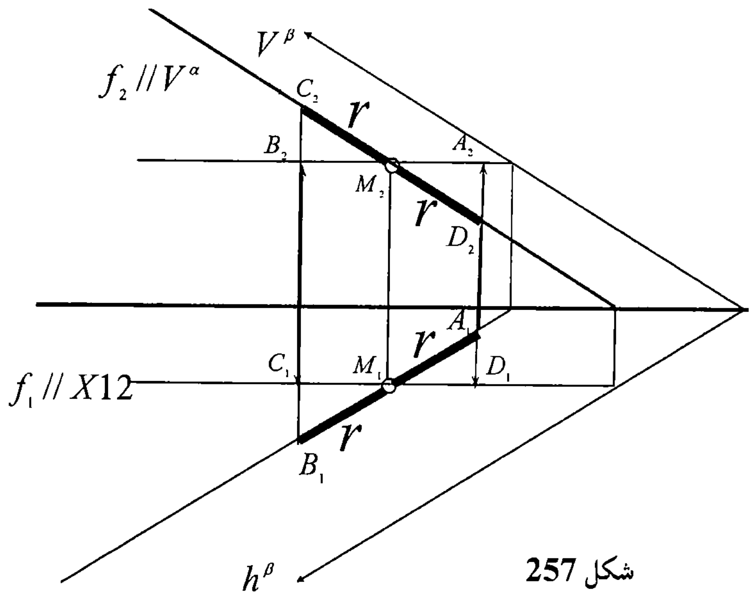
شكل 256

في المسقط الرأسى

. نلاحظ أن أقصى طول يمكن أن يكون فى المسقط الرأسى هى لمستقيم وجهى ويظهر بطولة الحقيقى وبالتالى داخـل أى دائـرة سيكون أحد الأقطار هى مستقيم وجهـى لأنه يحقق أقصى بعد فى إتجاة الإسقاط على المستوى الرأسى وعلية سيكون مسقط هذا المستقيم الوجهى هو المحور الأكبر والملركز فى منتصفه لأنه يسأوى قطر الدائرة الحقيقى 2r شكل 256 أما مسقط هذا المحور فى المستوى الأفقى هـو نقطتـان عاديتان واقعتان على مسقط محيط الدائرة الأفقى وهو مسقط يوازى خط الأرض وأقصى طول لة هو *مايوازى إسـقاط أقصى نقاط للمحور الأكبر الذى ظهر فى المستوى الرأسى* شكل 256

المسقطين الأفقى والرأسى معا

في الشكل الموضح شكل 257 يتم رسم من مركز الدائرة M_2 مستقيم وجهي و نوقع علية C_2, D_2 يبعدان عـن M_2 نصف القطر يكون هو المحور الأكبر فى المستوى الرأسى ومن هذا المستقيم الوجهي والنقاط C_2, D_2 نأتى لها فى المستوى الأفقى وهى C1, D1 حيث يعتبران نقطتان عاديتان على القطع في المسقط الأفقى في حين ألها عناصر المحور الأكبر في المستوى الرأسى. فى المسقط الأفقي يتم رسم من M_1 مستقيم أفقى نوقع عليه النقطتين B_1, A_1 يبعـدان عنM_1 نصف القطر ويكون هو المحور الأكبر فى المستوى الأفقى و النقاط B_1, A_1 نأتي بالمساقط الرأسية المناظره لها



شكل 257

في المستوى الرأسي وهى فتكون نقاط A_2 , B_2 عادية على القطع في المسقط الرأسي للقطع . وبذلك أصبح موجود فى كل مسقط كل من المحور الأكبر ومعه نقطتان عاديتان تقعان على محيط القطع الناقص "على الدائرة" واللتان سيتم الإعتماد عليهما بعد ذلك. أى أنه بمجرد الحصول على نقطتى المحور الأكبر فى مسقط تكون حصلت على نقطتين عاديتان على الدائرة فى المسقط الأخر. يجب أن نلاحظ أن المحور الأكبر فى المسقط الأفقى ليس له علاقة بالمحور الأكبر فى المسقط الرأسي والعكس صحيح.

التفسير الوصفي لإسقاط المحور الأصغر للدائرة

كما سبق الذكر من خواص الدائرة أن محورى الدائرة متعامدين. وفى الإسقاط قد أسقطنا المحور الأكبر بحالاته حيث يكون مستقيم أفقى فى π_1 ومستقيم وجهى فى π_2 وكلاهما بطوله الحقيقى فى مسقطة ، ومن إستنتاجات الإسقاط المساعد أن الزاوية القائمة تسقط قائمة مادام أحد اضلاعها بطولة الحقيقى. ومادام القطرين متعامدين وأحدهما بطوله الحقيقى، فإن إسقاط المحور الأصغر سيكون عمودى على المحور الأكبر (أى عمودى على الأثار) كل فى مسقطة فى π_1 و π_2. وبناء على ذلك : المحور الأصغر للقطع الناقص هو في الواقع مستقيم ذو ميل اعظم في مستوى الدائرة وبذلك يتم رسمه عمودى على الأثار أو مايوازيها (مستقيمات أفقية أو وجهية) من مركز الدائرة فى كل مسقط. ودائما طول المحور الأصغر يُستنتج بأحدى الطرق التى سيتم ذكرها بعد ذلك " إما بمعلومية نقطة على الدائرة والمحور الأكبر أو بالإسقاط المباشر من الدائرة خطى المسقط". والطريق المباشر للتطبيق السريع هو كالأتى:

الخلاصه: أنه بمجرد حل التمرين هندسيا أو وصفيا وتوفر M – و r –و أثار أى توفر المركز ونصف القطر ومستوى الدائرة أى إتجاه الأثار فإننا مباشرة نصنع الأتى :

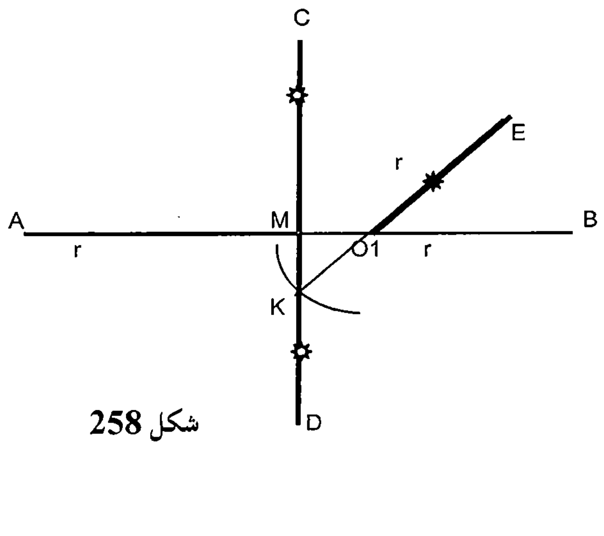
1. من المركز M نرسم خط موازى للأثار" إتجاه المحور الأكبر" وعمودى عليها "إتجاه المحور الأصغر"
2. على الموازى نوقع نصف القطر r يمين ويسار المركز فنحدد طول المحور الأكبر ونقاط نهايته فى كل مسقط ثم نوجد مساقط نقاط نهايات المحور الأكبر فى المسقط الأخر وهى نقاط عادية على الدائرة
3. العمودى من المركز على الأثار يقع عليه المحور الأصغر ويجب تحديد طوله وبالتالى يجب أن نتعلم أساليب تحديد طول المحور الأصغر وهذا ماسيتم عرضه فى البند القادم.

تعيين قيمة المحور الأصغر

1. بمعلومية المحور الأكبر ونقطة على القطع

فى شكل **258** معلوم نقطة **E** نقطة على القطع ومعلوم القطر الأكبر **AB** ومركزه **M** نقيم منه عمود على **AB** هو المحل الهندسى للمحور الأصغر نركز في نقطة **E** بفتحة تساوى نصف القطر للدائرة أو نصف قطر المحور الأكبر **r=MB** وتقطع محل عمل المحور الأصغر فيقطع فى **K** نصل **KE** فيقطع المحور الأكبر فى O_1 فيكون O_1E هو طول نصف المحور الأصغر نوقعه على المحور من **M** اعلى واسفل فنحصل على النقاط **D, C** هما اركان القطع الناقص.

يجب أن نعلم أن الدائرة عموما المسقط العمودى لها على مستويات الإسقاط عبارة عن قطع ناقص مركزة M_1, M_2 وهى مسقط مركز الدائرة الاصلي

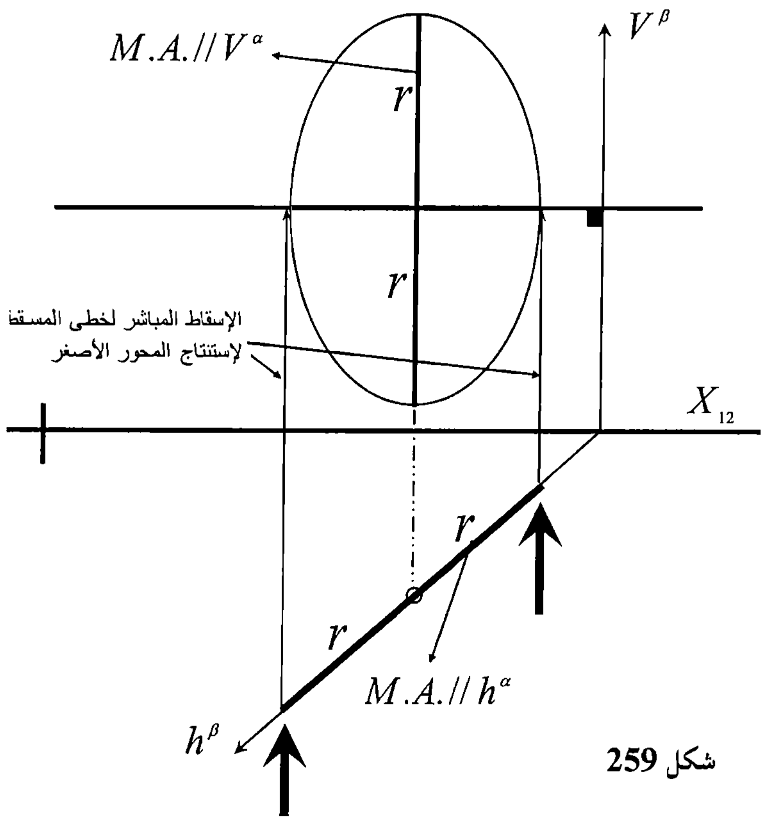


شكل **258**

M . قطر الدائرة الموازى لمستوى الإسقاط يسقط بطولة الحقيقي ويسمى المحور الأكبر للقطع الناقص ويساوى ضعف نصف القطر

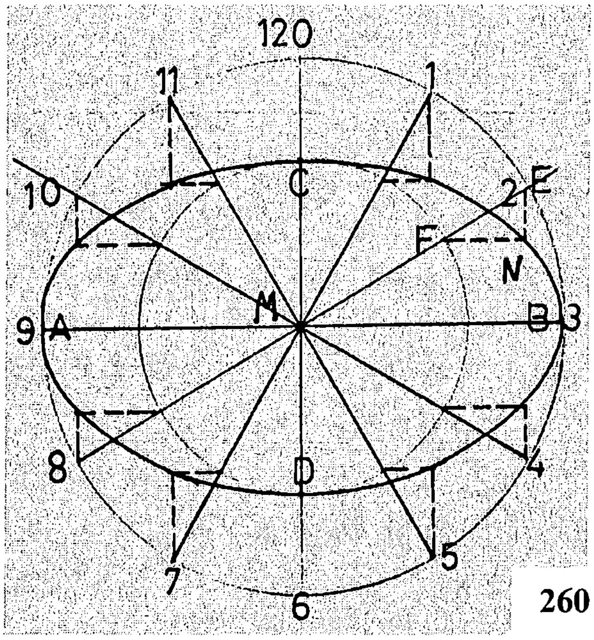
2. بمعلومية خطى المسقط

من شكل 259 نجد أن الدائرة إذا كانت فى مستوى عمودى خطى المسقط الأفقى لذلك الدائرة كلـــها يكـــون مسقطها الأفقى خط "خطى المسقط" وأقصى حدود لها كما هو واضح بالرسم. وطالما ظهرت الدائرة خـــط فـــإن الحدود عند أخر نقطتين على خطى المسقط هى الحدود الخارجية القصوى للدائرة وعند النظر فى إتجاه السهم على خطى المسقط فإنه يمكن الإسقاط على المسقط الرأسى بالإسقاط المباشر لهاتين النقطتين فيكون هـــو طـــول المحـــور الأصغر "أخر حدود الدائرة من اليمين والشمال أى أقصى حدود للمحور الأصغر". بالتالى لو أن المستوى لـــيس خطى المسقط وكان مستوى عام فإنه يتم تحويله لخطى المسقط لإستنتاج المحور الأصغر كما سيتم الشرح فى الأمثلة القادمة.



شكل 259

طرق رسم القطع الناقص

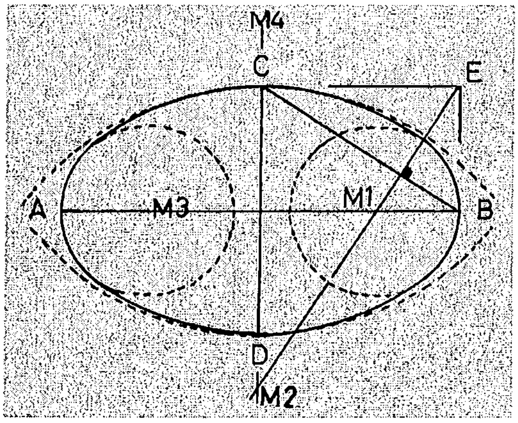


شكل 260

1. رسم القطع الناقص بمعلومية المحور الأكبر و المحور الأصغر

طريقة التآلف (الدائرتين المساعدتين)

المعلوم من قطع ناقط محوره الأكبر AB ومحور الأصغر CD المتعامدان شكل 260 و المتقاطعان في مركز القطع ولتعيين نقط على القطع الناقص من المركز نرسم دائرتين، إحداهما ب نصف قطرها المحور الأكبر والأخرى نصف قطرها المحور الأصغر مركزهما M . نُقسم الدائرة الكبرى الى 12 قسم أو أى عدد زوجي. للحصول على نقاط على القطع – نصل إحدى نقاط التقسيم ولتكن E=2 بالمركز M فتقتطع الدائرة الصغرى في نقطة F نرسم منها موازى للمحور الأصغر ومن E نرسم موازى للمحور الأكبر يتقاطعان في نقطة N أحدى النقاط على القطع نكرر العمل فنحصل على 12 نقطة حسب نقاط التقسيم ، نصلها فنحصل على الشكل النهائى للقطع شكل 260.



شكل 261

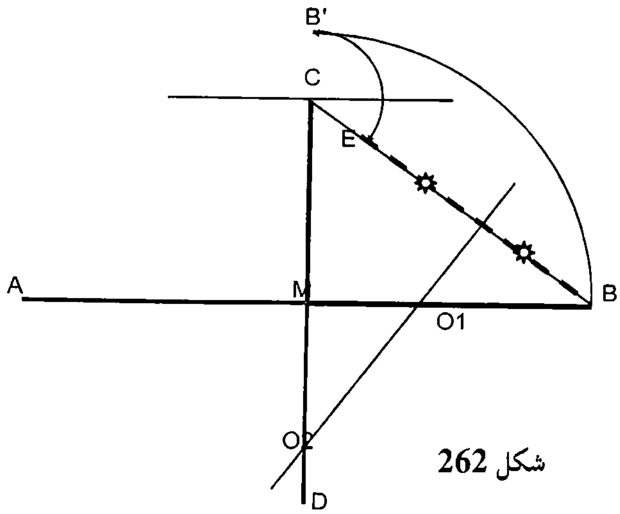
1-2. طريقة دائرة التكور (البرجل أو الاقواس)

بمعلومية المحور الأكبر AB و الأصغر CD يتم رسم القطع الناقص بأن نقيم من B موازى CD ومن C موازى AB يتقاطعان في نقطة E، نرسم من E عمودى على المستقيم الواصل بين CB يتقاطع مع AR في M_1 ومع CD في M_2 . M_1 هو مركز القوس الذى يمر بنقطة B ويُنقل للناحية الأخرى فنحصل على M_3 نرسم منها قوسين بنصف

قطر M_1B ,M_3A، ومن M_2 نرسم قوس نصفM_2C وتنقلة من D فنحصل على M_4 نرسم منه قوس M_4D نصف قطر الاقواس المرسومة يتم أحداثي التقارب بينهم برسم المنحنيات .

3-1. الطريقة الدقيقه

من شكل 262 نصل بداية المحور الأصغر ببداية المحور الأكبر وهما نقطتى C,B ثم نطرح بالرسم فرق نصفى القطر (CB-MC)ويتم ذلك بأن نركز فى M وندور بنصف القطر MB حتى ينطبق على خط عمل MC ونحصل على 'B فيظهر

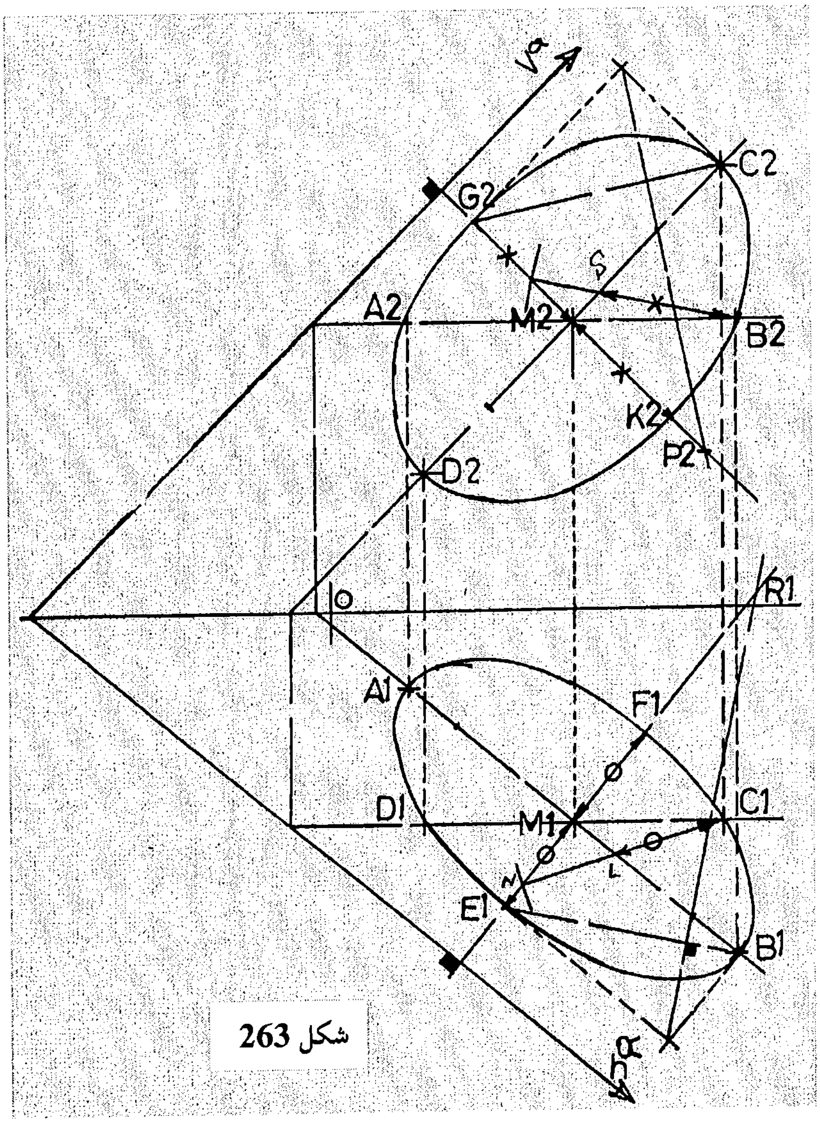


شكل 262

الفرق بين نصفى القطر الأكبر والأصغر وهو 'CB نعود ونركز فى C ونطرح بالرسم هذا الفرق من المسافه CB بالدوران مع عقارب الساعه حتى يقطع CB فيتبقى الجزء EB ننصفه ونقيم عمودى عليه فيقطع المحور الأكبر فى نقطهO1 والأصغر فى أخرى O2 هما نقطتى الإرتكاز لنصف القطع حيث نرسم جزء من دائرة نصف قطرها O1B من المركز O1 ومن نظيره من ناحيه الطرف الأخر A وكذلك من O2 نركز بنصف القطر O2C ونرسم جزء الدائرة العلوى ثم ننقل المركز المناظر O2 أعلى C ونرسم نفس القوس فنوجد الجزء الأخير.

مثل الدائرة الواقعة فى المستوى $\alpha(-5,4,5)$ ومركزها $M(4,3.5,??)$ ونصف قطرها 3.5cm
التفكير: لابد أن نتعلم الإسلوب العلمى للتفكير كما نبهنا سابقا وهو كالاتى:

نقول أن الدائرة هى M – r – أثار وبالتالى نبحث فى المعطيات ما هو الموجود، فنجد أولا الأثار معروف إتجاهها لأن المستوى معروف، ثانيا المركز معروف ومعطى مباشرة، ثالثا نصف القطر معروف أيضـا . من ذلك يتضح أنه ليس هناك مشكله تتطلب الحل سـوى توقيع ورسم الدائرة . وبالفعل هذا هو الهدف من هذا التمرين ، أن تتعلم كيف ترسم دائرة كامله بعد الحصول على الثلاثه بنود شكل 263.



شكل 263

الحل:

1. نوقع المعطيات وهى المستوى والمركز

2. من المسقط الأفقى للمركز M_1 نرسم مسقط لمستقيم أفقى موازى للأثر الأفقى ونوقع عليه الطول لنصف القطـر يمين ويسار فنحصل على المحور الأكبر فى المسقط الأفقى وهما A_1B_1 ونوجد مساقطهما الرأسية كنقـاط علـى مستقيم أفقى بالمستوى وهما A_2B_2 " وتصبح نقاط عاديه على الدائرة فى المسقط الرأسى ".

3. من المسقط الرأسى للمركز M_2 نرسم مسقط لمستقيم وجهى موازى للأثر الرأسى ونوقع عليه الطول لنصف القطر يمين ويسار فنحصل على المحور الأكبر فى المسقط الرأسى وهما C_2D_2 ونوجد مساقطهم الأفقيـة كنقـاط علـى مستقيم وجهى بالمستوى وهما C_1D_1" وتصبح نقاط عاديه على الدائرة فى المسقط الأفقى "
4. من مساقط المركز M_1,M_2 نرسم أعمدة على الأثار فتكون هى المحل الهندسى للمحور الأصغر، ويبقى إذا تحديد طول المحور الأصغر فى كل من المسقط الأفقى والرأسى شكل **263**
5. فى المسقط الأفقى نعتمد على C_1 على إنها نقطة عادية على الدائرة ونستنتج طول المحور الأصغر فى المسقط الأفقى بإستخدام طريقه معلوميه المحور الأكبر ونقطة على الدائرة، فنركز فى C_1 بطول نصف قطر الدائرة ونقطع إتجـاه المحور الأصغر فى نقطة N وهى فى الجانب الأخر من النقطه C_1 فيقطع المحور الأكبر فى L فيكون LC_1 هو طول نصف المحور الأصغر فى المستوى الأفقى. يتم توقيع هذا الطول على العمودى إبتداء من المركز فتتحدد نهايات المحور الأصغر فى المستوى الأفقى. نستخدم أحد اساليب رسم القطع الناقص ونرسمه
6. فى المسقط الرأسى نعتمد على B_2 على إنها نقطة عاديه على الدائرة ونستنتج طول المحور الأصغر فى المسقط الرأسى بإستخدام طريقه معلوميه المحور الأكبر ونقطة على الدائرة، فنركز فى B_2 بطول نصف قطر الدائرة ونقطع إتجـاه المحور الأصغر فى نقطة وهى فى الجانب الأخر من النقطه B_2 فيقطع المحور الأكبر فى S فيكون B_2S هـو طـول نصف المحور الأصغر فى المستوى الرأسى. يتم توقيع هذا الطول على العمودى إبتداء من المركز فتتحدد نهايات المحور الأصغر فى المستوى الرأسى. نستخدم أحد اساليب رسم القطع الناقص ونرسمه – شكل **263**.

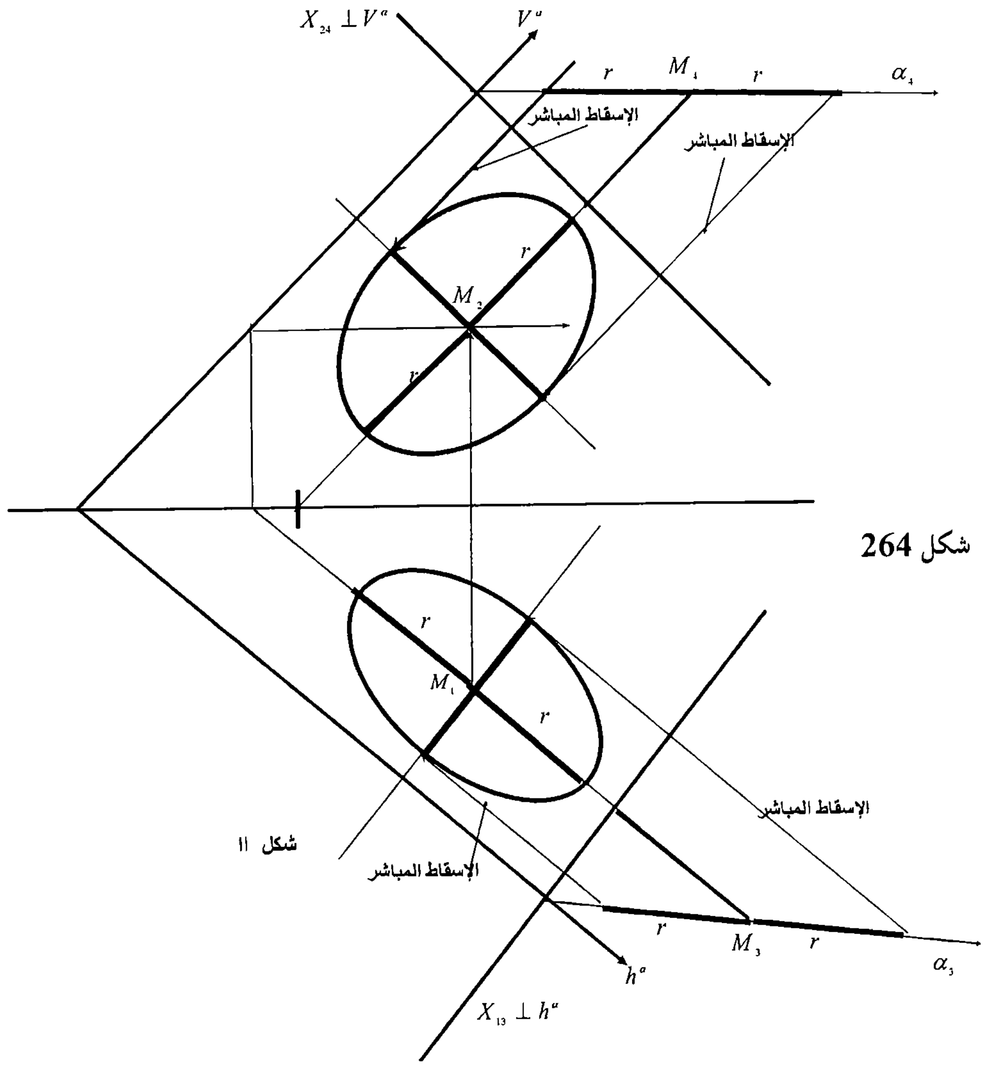
فى هذا المثال تم إستنتاج المحور الأصغر بمعلوميه المحور الأكبر ونقطة عادية على الدائرة. وسوف نشرح المثال القادم الذى يوضح إسلوب إستنتاج المحور الأصغر بتحويل المستوى إلى خطى المسقط.

مثال : المعلوم المستوى والمركز ونصف القطر للدائرة: إرسم الدائرة فى المستوى الأفقى والرأسى

الحل:بنفس الإسلوب السابق يتم الحل ولكن الإختلاف فى إسلوب إيجاد المحور الأصغر شكل **264** ويتم كالاتى.

1. فى المستوى الأفقى يتم تحويل المستوى لخطى المسقط وبالتالى الدائرة تظهر كخط طوله **2r** يمن وشمال **M_3** فتتحدد نهايات حدود الدائرة. وبالتالى يتم تحديد المحور الأصغر فى المستوى الأفقى بالإسقاط المباشر من خطى المسقط من الثلاثات كما هو موضح فى الشكل **264**

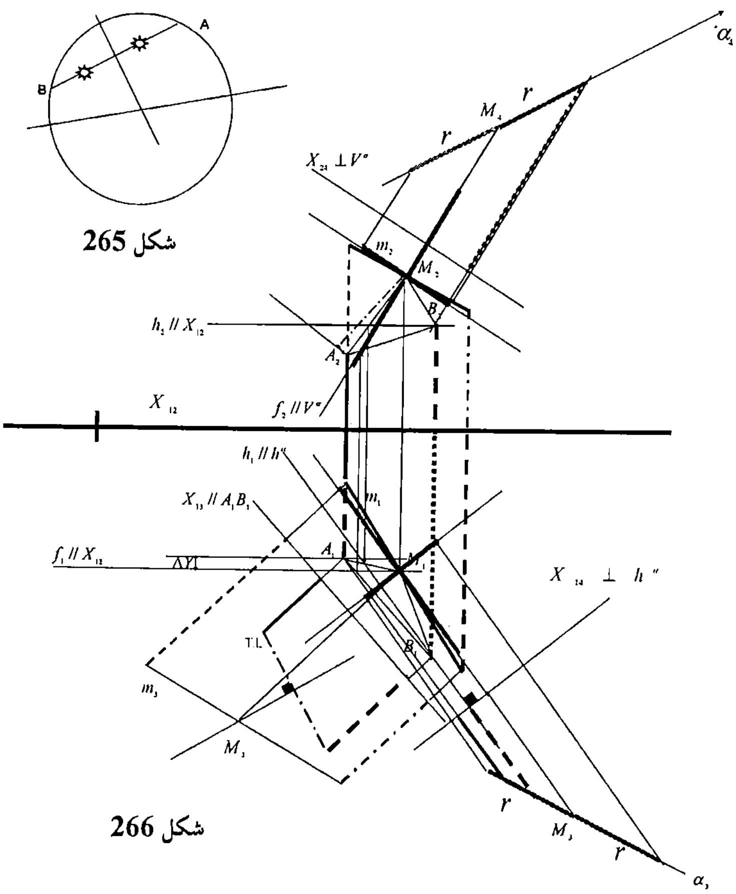
2. فى المستوى الرأسى يتم تحويل المستوى لخطى المسقط وبالتالى الدائرة تظهر كخط طوله **2r** يمن وشمال **M_4** فتتحدد نهايات حدود الدائرة. وبالتالى يتم تحديد المحور الأصغر فى المستوى الرأسى بالإسقاط المباشر من خطى المسقط من الاربعات كما هو موضح فى الشكل**264**



شكل **264**

مثال: مثل الدائرة التى يمر محيطها بالنقطتين A(8,4,2.5), B(11,7,3.5) ويقع مركزها على المستقيم m[(12,7.5,4), (8,1.5,6)

الحل :من المعطيات ومن إسلوب التفكير فإنه غير موجود الثلاثة متطلبات لرسم الدائرة لذلك نتجه للخواص الهندسيه للدائرة بناء على المعطيات ونرى تحقق الحل فى الهندسة المستوية. من شكل **265** المعلوم نقطتين على الدائرة " همـا وتر" ومحل هندسى للمركز "على **m** " وبالتالى ننصف الوتر ونقيم عمود عليه يقطع المستقيم **m** فى المركز ويصبح المركز والنقطتين على الدائرة هما الثلاثة نقاط المكونة لمستوى الدائرة وكذلك نصف القطر يصبح معروف.



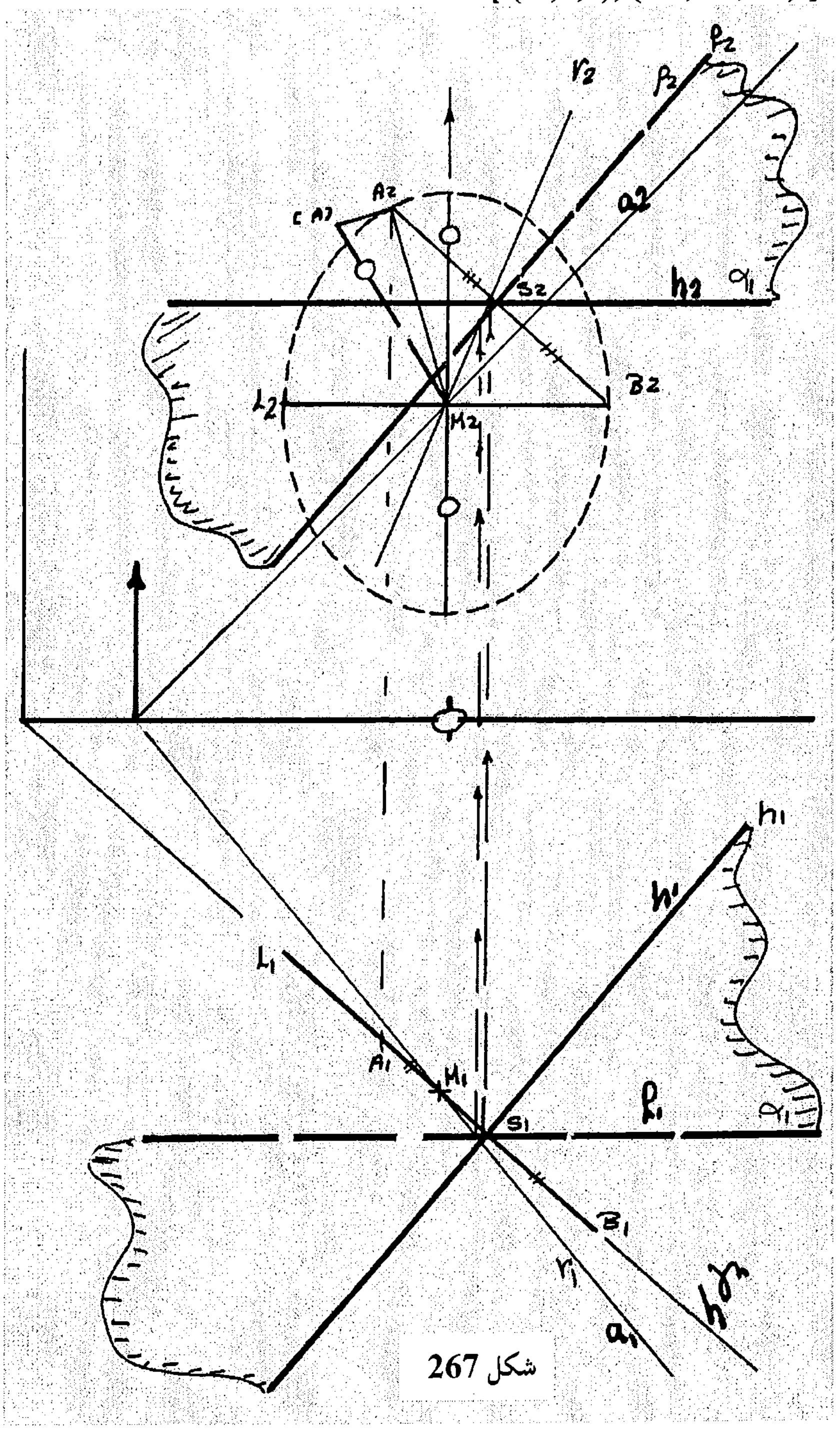
شكل **265**

شكل **266**

2. ولعمل ذلك يتم فى شكل **266** كما سبق الذكر مـادام سيتم عمل عمود واحد علـى مسـتقيم "الـوتر **AB**" فى الهندسة المسـتويه فإنـه يـتم إستخدام الإسقاط المساعد لهذا المستقيم لتحويله لطول حقيقى ثم نقيم عمودى عليه نسـتنتج المركز ونعود به.
3. نكون من المركز **M** والنقطتين **A,B** مستوى .نوجد الطول الحقيقى لنصف قطر الدائرة بفرق البعد.
4. نبدأ فى رسم الدائرة برسم المحور الأكبر موازى لأى مستقيم أفقى وكذلك وجهى واقعين فى المستوى ولاداعـى لإيجاد الأثار ونكتفى فقط بإتجاهها.
5. نحول المستوى لخطى المسقط لإستنتاج المحور الأصغر فى كلا المسقطين

6. يصبح محدد المحور الاكبر والأصغر وهم مظللين وقد أكتفينا بذلك حتى يكون الحل واضح ، ولــك أن تُكمــل الشكل

مثل الدائرة التى يقع مركزها على المستقيم a وتمر بالنقطتين A(-1,5,8), B(2.5,8,5)، حيث المستقيم a ممثل كالأتى: a [(-5,0,0), (0.5,6.5,5.5)]



شكل 267

الحل:

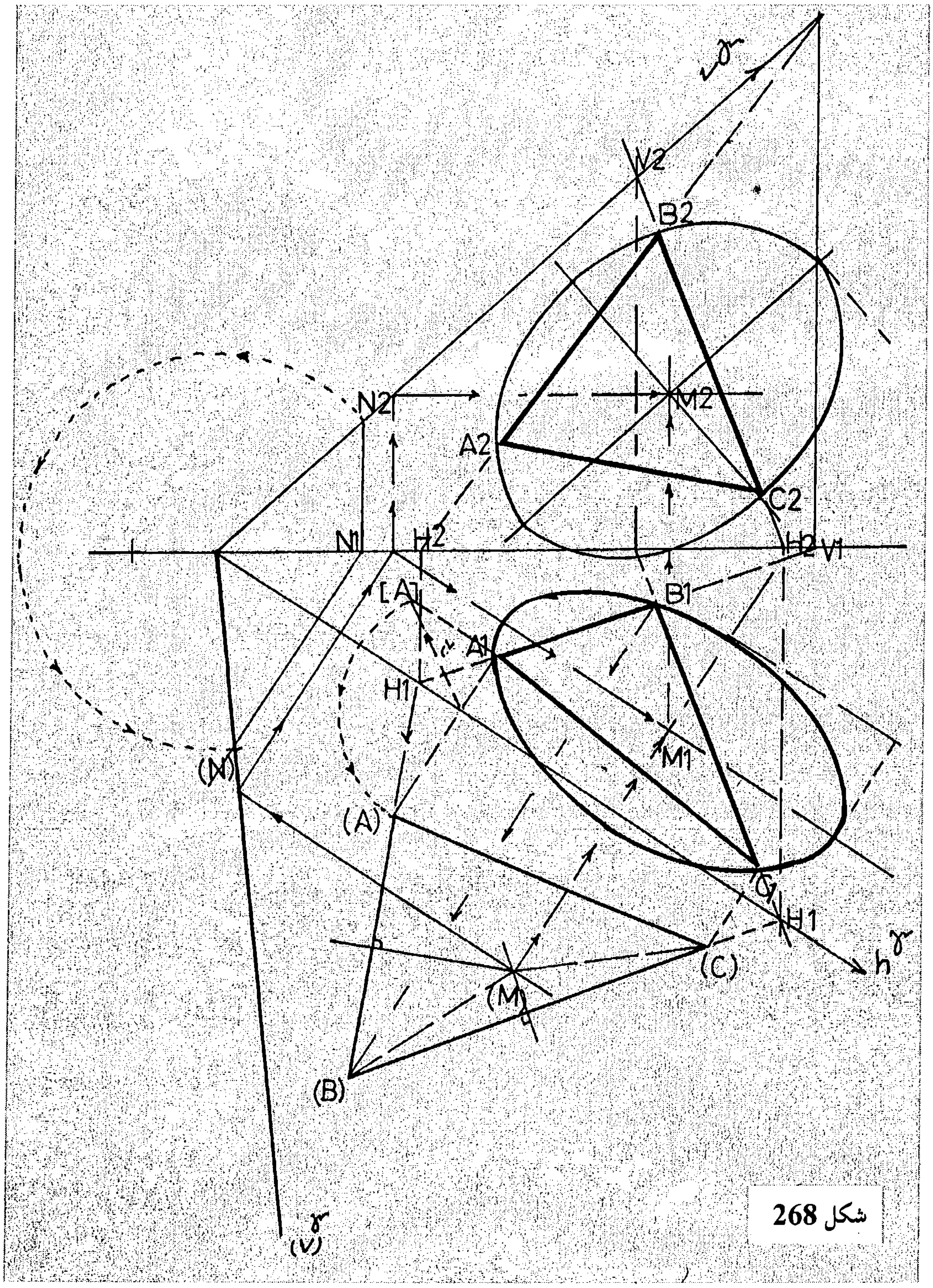
1. ننصف الوتر ونقيم عمود عليه يقطع المستقيم a فى المركز ويصبح المركز والنقطتين على الدائرة هما الثلاثة نقاط المكونه لمستوى الدائرة وكذلك نصف القطر يصبح معروف. ويتم رسم المستوى العمودى بإستخدام القياس حيث نرسم مستوى عمودى ممثل بمستقيمين أحدهما أفقى عمودى والأخر وجهى عمودى *h* , *f* . نوجد نقطة تقاطع المستقيم a مع المستوى بإستخدام إسلوب الموضع الخاص بنقطة تقاطع مستقيم مع مستوى ممثل بمستقيمين فتكون M.

2. M_1 والنقطتين A_1وB_1 وقعا على خط واحد أى أن مستوى الدائرة خطى أى عمودى على المستوى الأفقى وبالتالى يمكن تحديد المحور الأكبر والأصغر فى المستوى الرأسى وإستكمال الشكل كما فى الشكل 267 .

معلوم ثلاثة نقاط A(6,2,2), B(9,1,6), C(11,6,1) مثل الدائرة التى تمر بهذه النقاط

الحل: من المعطيات ومن إسلوب التفكير فإنه غير موجود المركز أو نصف القطر وإنما الموجود ثلاث نقاط مكونة لمستوى

الدائرة. وبالتالى نلجأ للهندسة المستوية لنبحث فكره الحل. ومن الهندسة المستوية يتم تنصيف أى ضلعين وإقامة أعمدة



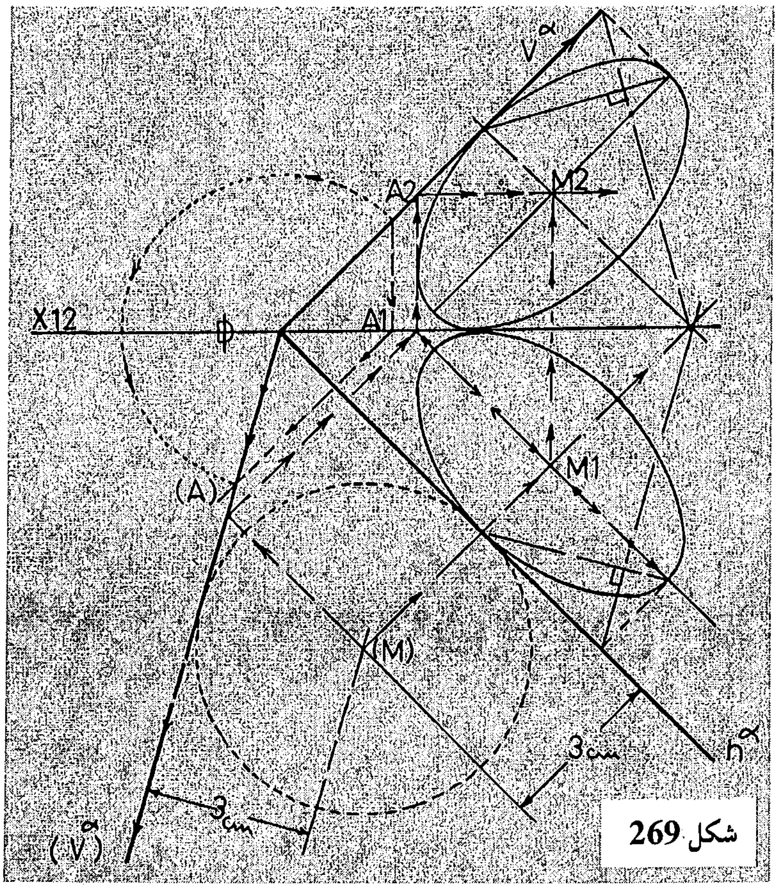
شكل 268

عليها فنوجد المركز. وليتم ذلك فى الهندسة الوصفية لابد أن نحصل على الشكل الحقيقى للمستوى وهذا ماأكدناه سابقا أنه يجب أن نعلم أننا طالما وجدنا أن الحل فى الهندسة المستويه يستلزم رسم أكثر من عمود فإننا نتجه مباشـــرة لإيجـــاد الشكل الحقيقى للمستوى.

لذلك من شكل **268** أول خطوه هى إيجاد الشكل الحقيقى للمستوى " إما بالإسقاط المساعد أو بالدوران" ونحن قـــد استخدمنا الدوران فى هذا المثال وبالتالى إستخدمنا خواص الهندسة المستويه فى إيجاد المركز وكذلك نصف القطر فى ال **T.S** . ومن ثم نعود بهم وأصبح لدينا كل المتطلبات لرسم الدائرة.

مثل دائرة تمس كل من h^{α}, V^{α} للمستوى $\alpha(1,135^{0},45^{0})$ ونصف قطرها 3cm.

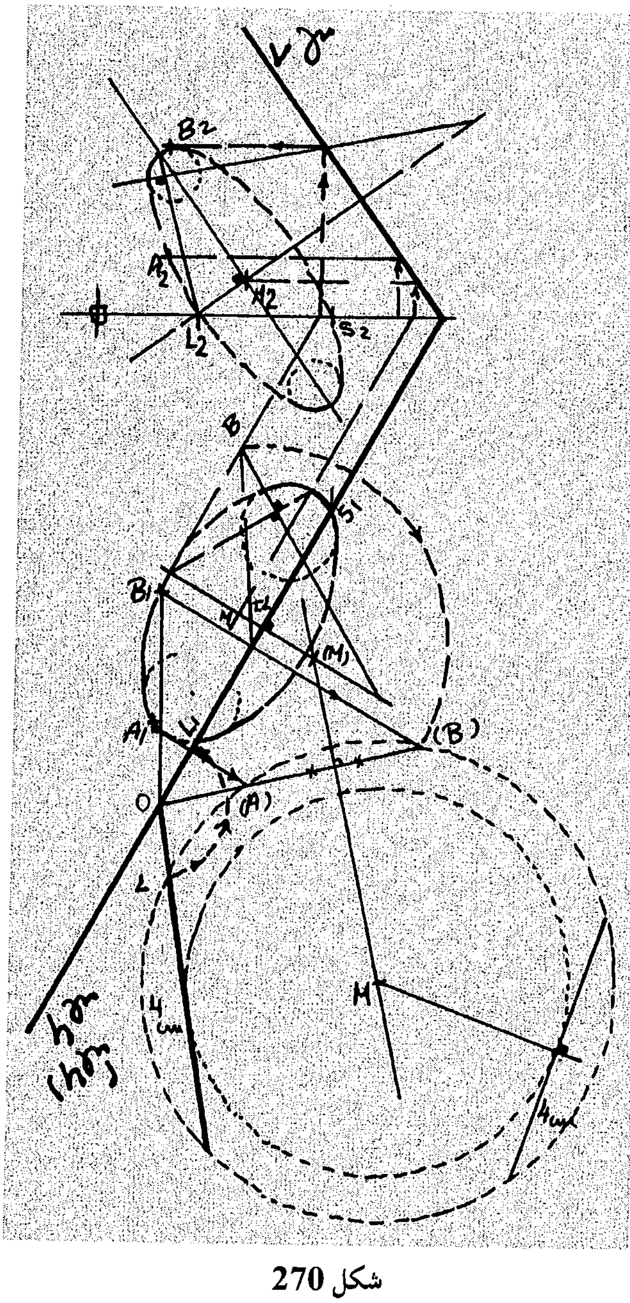
الحل: نوجد الشكل الحقيقـــى للمســـتوى بأثـــاره وذلـــك بإستخدام الإسقاط المساعد أو الدوران "والـــدوران أســـهل وأبسط عامـــة". فى شـــكل **269** نســـتخدم العمليـــات الهندسيه فى إيجاد مركز دائرة تمس خطين مستقيمين وهمـــا الأثار ونصف قطرهـــا **3cm** فنوجد المركز ونعود به ونكمل الدائرة فى الإسقاط حيث توفر الثلاثة أشـــياء **M** –و **r** –و أثار .



شكل **269**

مثال: مثل الدائرة التى تمر بالنقطتين التاليتين (A(1,6,؟ , (? ,4 ,1) B إذا كان مستواها هو λ(5,9,7) وتقطع من الأثر الأفقى له طولا قدره 4 سم .

الحل:من الوصول للشكل الحقيقى لمستوى الدائرة يمكن الحل لأن المطلوب من التمرين يتم حله بإستخدام عمليات الهندسة المستويه وبالتالى لابد أن نكون فى الشكل الحقيقى. فى شكل 270 يتم إستخدام الدوران للحصول على (A), (B) وهو وتر فى الدائرة المطلوبه. ننصف الوتر (A) (B) ونقيم عمودى فيكون المحل الهندسى لمراكز الدوائر التى تمر بالنقطتين. نختار أى نقطة لتكون مركز لدائرة حقيقية تمر بالنقطتين ونصنعها. من داخل هذه الدائرة يتم عمل وتر بطول 4cm ثم نركز فى مركز الدائرة ونصنع دائرة بداخلها تمس الوتر 4cm . من نقطة O مركز على محور الدوران للنقطتان A,B ، نصنع مماس للدائرة التى تمس الوتر 4cm فيقطع الدائرة الخارجية فى نقطة L وهى نقطة بداية الوتر المطلوب للدائرة وهى مكانها الحقيقى على الأثر فيتم دورانها على الأثر الأفقى فنحصل على L_1 . منها نقيس 4cm على الأثر فيكون الجزء المقطوع من الأثر وننصفه ونرسم عمودى عليه فيكون محل هندسى للمركز سواء (M) أو M حيث يتم تحديد (M) بتقاطع العمودى مع المحل الهندسى

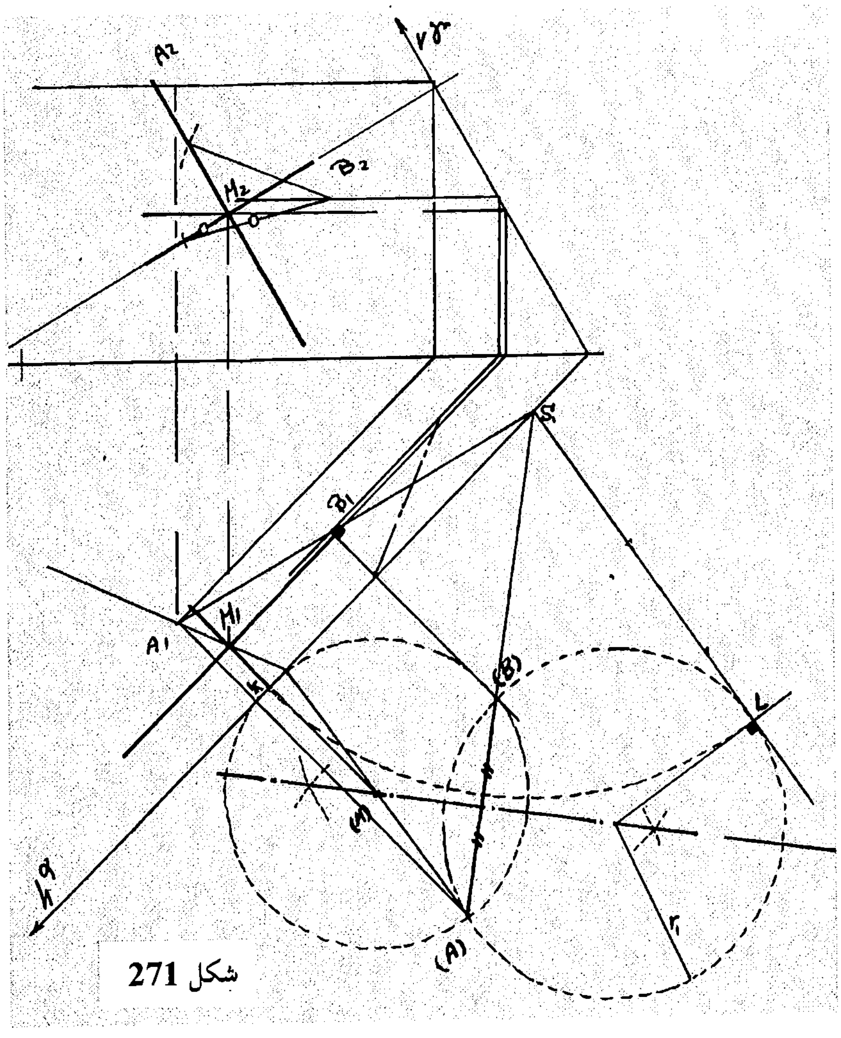


شكل 270

لمركز الدائرة فى الدوران ومن ثم نعود ونأتى M ونكمل الحل لإستكمال شكل الدائرة. ملحوظة: هذا الحل مأخوذ من العمليات الهندسة ويمكن العودة للعمليات لمعرفة الحل الهندسى.

مثال: مثل الدائرة التى تمر بالنقطتين التاليتين A(2.5,5,5), B(6,3.5,3) اذا كان مستواها هو α $(11,45^0,120^0)$ وتمس الأثر الأفقى فى نقطة K مع إستنتاج نقطة K.

الحل: بالدوران نوجد (A), (B) وننصفه أيضا ونصنع عمودى عليه يكون محل هندسى لمراكز الدوائر التى تمر بهم. نختار أى نقطة ونصنع دائرة بنصف قطر r_1 ومن S_1 نصنع مماس لهذه الدائرة يمس فى L بدوران نقطة التماس إلى الأثر نحصل على نقطة التماس الأصلية K حيث أن النسبة SK أو SL ثابتة لكل الدوائر التى تمر بالنقطتين ، من K نصنع عمودى على الأثر فى إتجاه الدوران



شكل 271

فنوجد (M) ونرجعه نوجد M_1 و M_2 . ونكمل الحل

تمارين الدائرة

1- معلوم مستوى α (-7,7,?) ونقطة فيه M (0,3,3) مثل الدائرة التي تقع في α ومركزها M ويمر محيطها بالنقطة P (-2,3,Z) .

2- معلوم نقطة P (6,1,2.5) ومستقيم m [A (5,6.5,5) , B (8,1,1)] مثل المسار الناتج عن دوران النقطة P حول المستقيم m .

3- مثل الدائرة الواقعة في المستوى α (6,4,5) وتمس المستقيم $l=AB$ ويقع مركزها M على المستقيم k = CD حيث :

A (1.5 , 0 , ?),B (-3,4.5 , ?) ,c (2,2,3) D (-4,0,0) .

4- مثل دائرة C مسقطها الرأسي جزء مستقيم B_2 (2,2) و A_2 (6,7) ومركزها M يبعد 4 سم عن π_2

5- المعلوم α ($1,135^0,45^0$) والمطلوب تمثيل الدائرة التي تمس h α و vα ونصف قطرها 3 سم .

6- معلوم ثلاث نقاط A (6,2,2) و B (9,1,6) وC (11,6,1) مثل الدائرة التي تمر بهذه النقاط .

7- المعلوم مستوى رأسي α يمر بالنقطة M (6,6,4) ويميل على π_2 بزاوية مقدارها 45^0 مثل دائرة تقع في α ومركزها M ونصف قطرها 2cm .

8- مثل دائرة رأسية مركزها النقطة M (6,3,3) ويمر محيطها بالنقطة P (5,5,4.5)

9- المعلوم مستوى α عمودي على π_2 يمر بالنقطة M (2,4,3) ويميل على π_2 بالزاوية 60^0 مثل دائرة تقع في α ومركزها M وتمس الاثر الافقي للمستوى .

10 - مثل الدائرة التي تمر بالنقطتين A (8,4,2.5) و B (11,7,3.5) ويقع مركزها على المستقيم m [p(12,7.5,4) , Q (8,1.5,6)] .

11- المعلوم نقطة P ومستقيم v مثل المسار الذي ترسمه النقطة P اذا دارت حول v دورة كاملة في الحالات الأتية : اولا : P (6,2,3) والمستقيم v رأسي يمر بالنقطة A (5,4,z) .

ثانيا : P (5,6,2) المستقيم v وجهي يميل على π_1

الباب العاشر

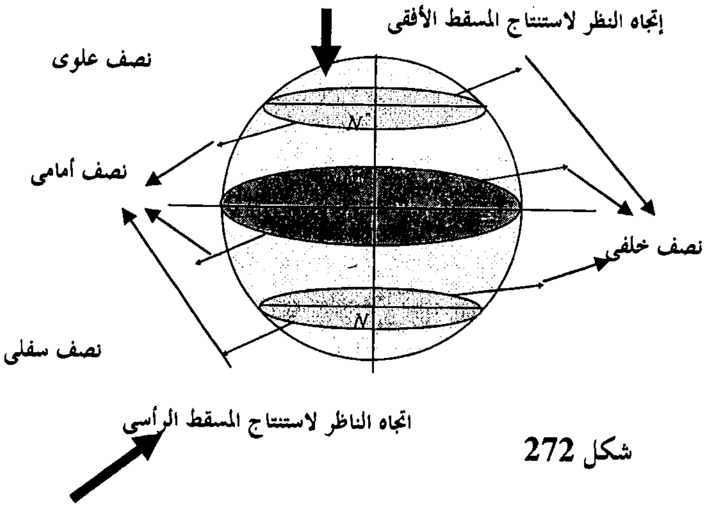
الكرة

تمثيل الكرة

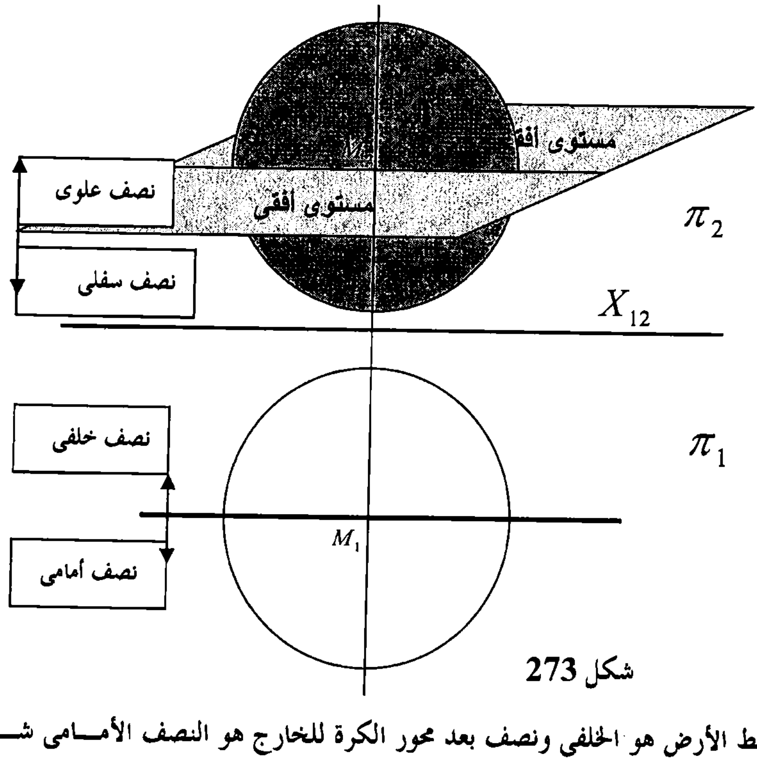
الكرة فى الفراغ والإسقاط

الكرة هى المحل الهندسى فى الفراغ لجميع النقاط المتساوية البعد عن نقطة واحدة وتبعد مسافة R عن هذه النقطــة.

والكرة مثلثها مثل أى جسم لها مساقطها الرأسية ومساقطها الأفقية وكذلك الجانبية. يجب أن نعلــم أن الكــرة إذا ماوضعناها أمام المستوى الرأسى وفوق المستوى الأفقى فإن هذه الكرة تنقســم إلى أربع أنصاف إعتبارية. فالكرة لو تم قطعها بمستوى موازى للمستوى وجهى "موازى للرأسى" فإن الكــرة تكــون نصفين ، نصف أمام المستوى الرأســى وهو النصف الخلفى عند الإســقاط فى المسقط الأفقى، " كما يتضح من النظر فى إتجاه السهم عند النظر من أعلــى لأســفل فى الشكل الموضح 272 ". هذا يتضح فى المســقط الأفقــى للكــرة فى شــكل 273و 274حيث تظهر الكــرة فى المسقط الأفقى دائــرة مــن نصفين من محورها، نصف من المحور الخاص بالكرة ويتجه نحو خط الأرض هو الخلفى ونصف بعد محور الكرة للخارج هو النصف الأمــامى شــكل 274 و273. أما عند النظر فى إتجاه عمودى على المستوى الرأسى وقطع الكرة من منتصفها بمستوى أفقى ، فإن الكرة

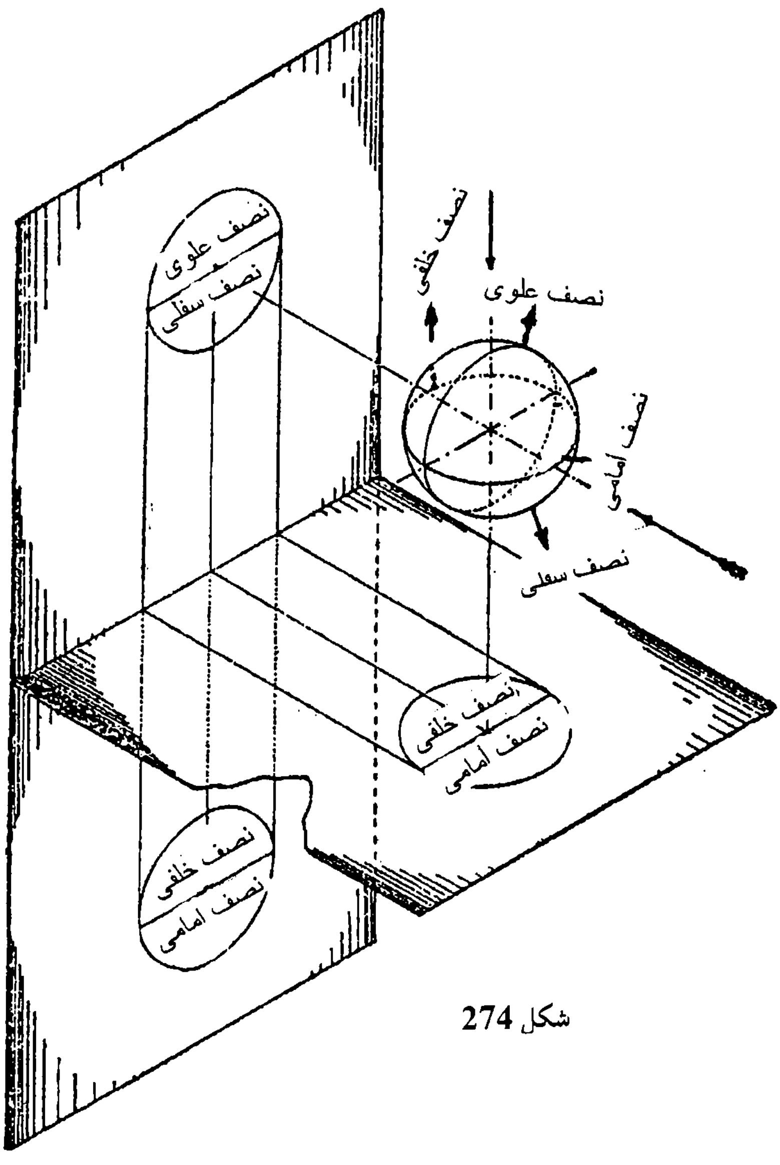


شكل 272



شكل 273

تنقسم أمام الناظر على المستوى الرأسى لنصفين، نصف علوى أعلى المحور ونصف سفلى أسفل المحور شـــكل 273و 274. وبالتالى الكرة فى مسقطها فى المستوى الرأسى نصفين أحدهما علوى والأخر سفلى، ومسقطها فى المستوى الأفقى نصفين أحدهما أمامى والأخر خلفى. لذا يجب أن نعلم أن الكرة عندما تُقطع بمستويات أفقية تقطعها فى دوائر موازيـــة للمستوى الأفقى وتظهر بشكلها الحقيقى فى المستوى الأفقىشكل 272 وتظهر فى المستوى الرأسى خطية المسقط طولها 2r . وكذلك لو تم قطع الكرة بمستويات وجهية فإنها تقطع الكرة فى دوائر وجهية تظهر بشكلها الحقيقى فى المستوى الرأسى" دوائر حقيقية " وتظهر خطية المسقط الأفقى طولها 2r . وسنبدأ الشرح للخواص بإستخدام أمثلة مباشرة تدلل علىطبيعة الخواص العامة للكرة.



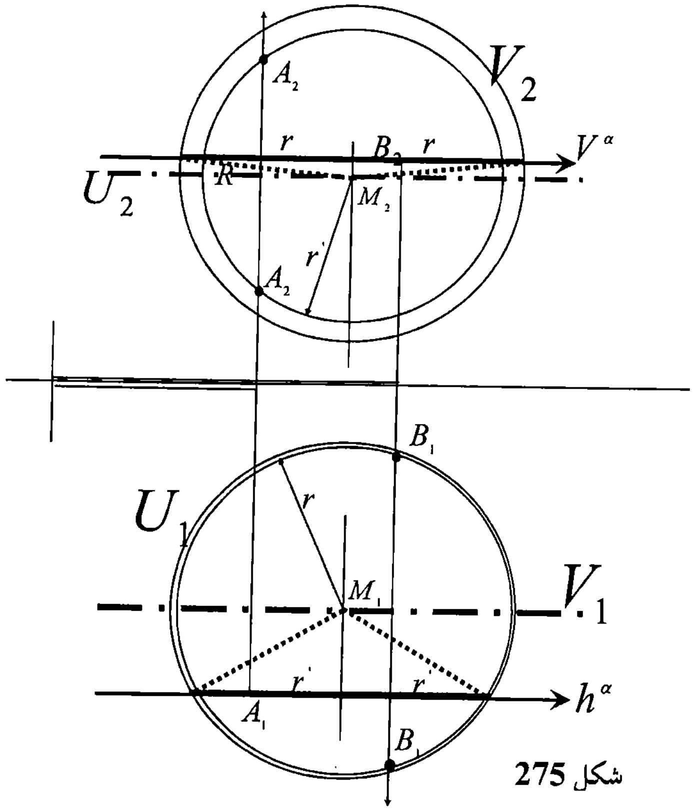
شكل 274

إستنتاج المسقط الناقص للنقاط على سطح الكرة

مثل الكرة ϕ مع تعيين المسقط الناقص للنقطة A الواقعة على سطح الكرة ϕ والمعلوم منها فقط المسقط الأفقى A_1

وكذلك بالنسبة للنقطة B معلوم منها B_2 .

الحـــل: فى شـــكل 275 الإطـــار الخارجي للمسقط الأفقى هو دائـــرة تعرف بالمحيط U_1 ومركزهـــا M_1 و نصف قطرها R ويكـــون المســـقط الرأسى لهذه الدائرة هو خط مستقيم يوازى خط الأرض X_{12} ويسمي U_2 وتعرف الدائرة ب U_1 (M_1 ,R) الاطار الخارجي للمسقط الرأسى هو دائرة تعرف بالمحيط V_2 ومركزهـــا M_2 ونصف قطرها هو نفس نصف قطر الـــدائرة الأفقـــية R فيكـــون



شكل 275

المسقط الأفقى لهذه الدائرة هو خط مستقيم يوازىخط الأرض X12 ويسمى V_1 وتعرف الـــدائرة V_2(M_2 ,R) شكل 275 .

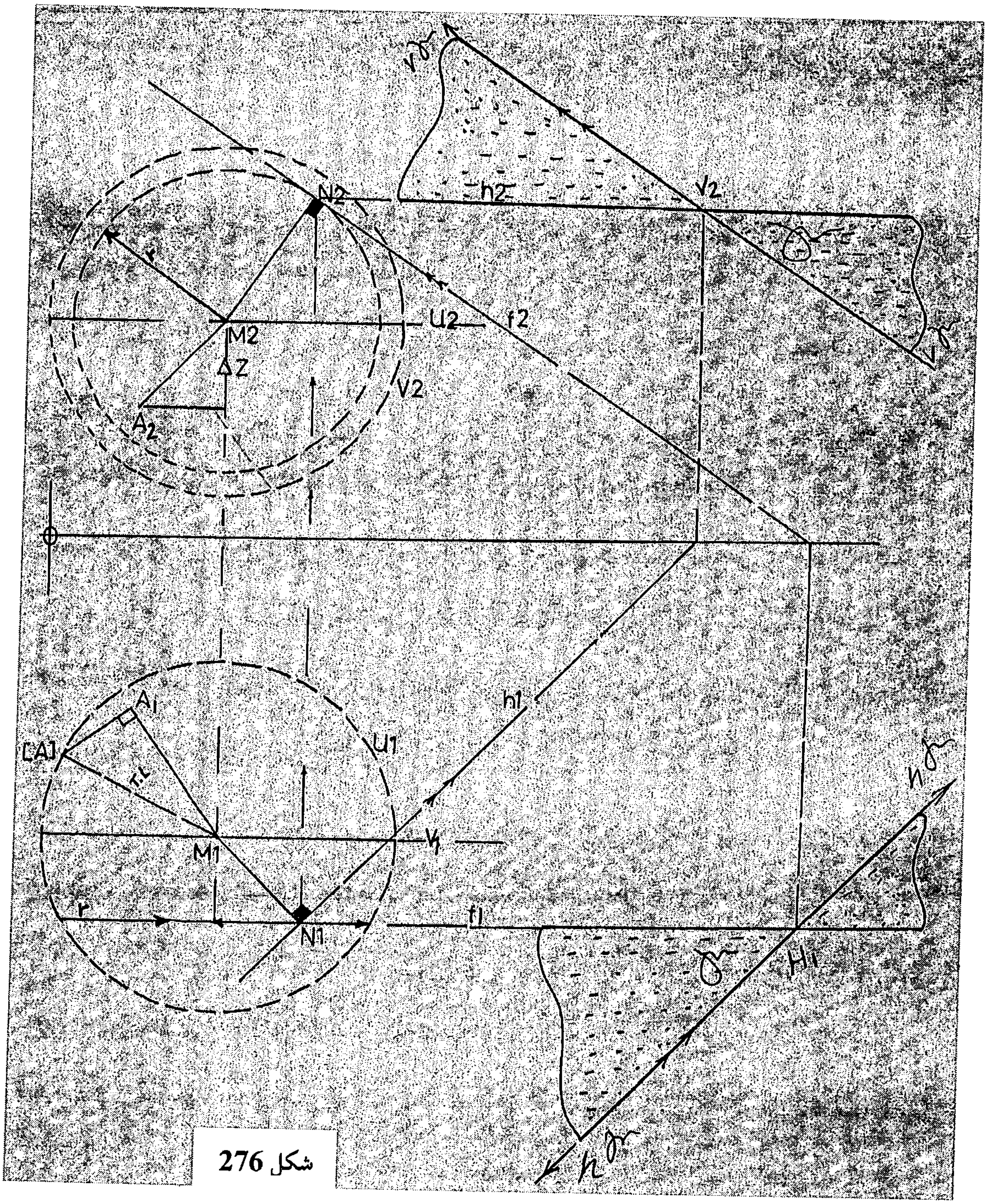
ولتعيين المسقط الرأسى للنقطة A_1 نمرر مستوى وجهي يمر بالنقطة A1 في دائرة وجهية تظهـــر خـــط مســـتقيم في المستوى الأفقى قطرها 2r وعلية نأخذ نصفها وهي r وننقله إلى المسقط الرأسى ونركز في M_2 ونصـــنع دائـــرة r ونسقط A_1 عليها فيكون هناك مسقطان أحدهما أعلى U2 و الأخر أسفلها أى أحدهما على النصف العلوى للكرة.و الأخر يقع على النصف السفلي للكرة وعلية العلوى هو A_2 و السفلي A_2' وهذه النقطة تقع في النصف الأمـــامي للكرة حيث مسقطها أسفل V_1 في المسقط الأفقى ولو كانت تقع أعلى V_1 تكون هذه النقطة في النصف الخلفي للكرة

. ونكرر ذلك بالنسبه للنقطة B بإستخدام مستوى أفقى شكل 275.

مثل كرة مركزها M(4,7,5) وتقع نقطة A(2,4,3) علي سطحها وإذا كانت N1(6,9) هي المسقط الأفقى لنقطة N التى تقع على النصف العلوى لسطح الكرة ، عين N_2 ثم مثل المستوى المماس للكرة عند N .

الحل: أولا لايوجد سوى المركز M ونقطة A على سطح الكرة شكل 276، وبالتالى نصف قطر الكرة هـو MA ولكنه ليس طول حقيقى ، لذلك نبدأ بإستنتاج الطول الحقيقى لنصف قطر الكرة "T.L" R=AM ثم من المركز يتم رسم الكرة .ولإستنتاج المسقط الرأسى الناقص لنقطة N يتم تمرير مستوى وجهى بالمسقط N_1 فيقطع الكـرة فى دائرة وجهية مسقطها الأفقى خطى ويظهر نصف قطرها r فنرسم الدائرة الرأسية الحقيقية بنصف القطر r ثم نصـعد منN_1 عليها لنوجد N_2 والتى تقع على النصف العلوى فنستنتج الإحداثى الناقص للنقطة N.

المستوى المماس لسطح الكرة: المستوى المماس لسطح الكرة فى نقطة Nهو مستوى عمودى على نصف القطر MN من نقطة N ، وعيه نرسم المستوى γ مستوى عمودى على نصف القطر من نقطة التماس، أى يتم رسمـه كمـا فى القياس بإستخدام مستقيم أفقى عمودى ووجهى عمودى $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{h}$. شكل 276



شكل 276

تمثيل المستوى المماس للكرة بالأثار – وإيجاد الإحداثيات الناقصة للنقاط.

مثال- مثل الكرة التى مركزها S(0,4.5,4) وسطحها يمر بالنقطة المعلومة A(-2,2,2) وعين النقطة B(1,?,6.5) C(2,?,4) D(-1,6,?) الواقعة على سطح الكرة، ومثل كذلك المستوى المماس لسطح الكرة عند النقطة A

كيفية الحصول على نصف قطر الكرة بمعلومية مركز الدائرة ونقطة على المحيط :

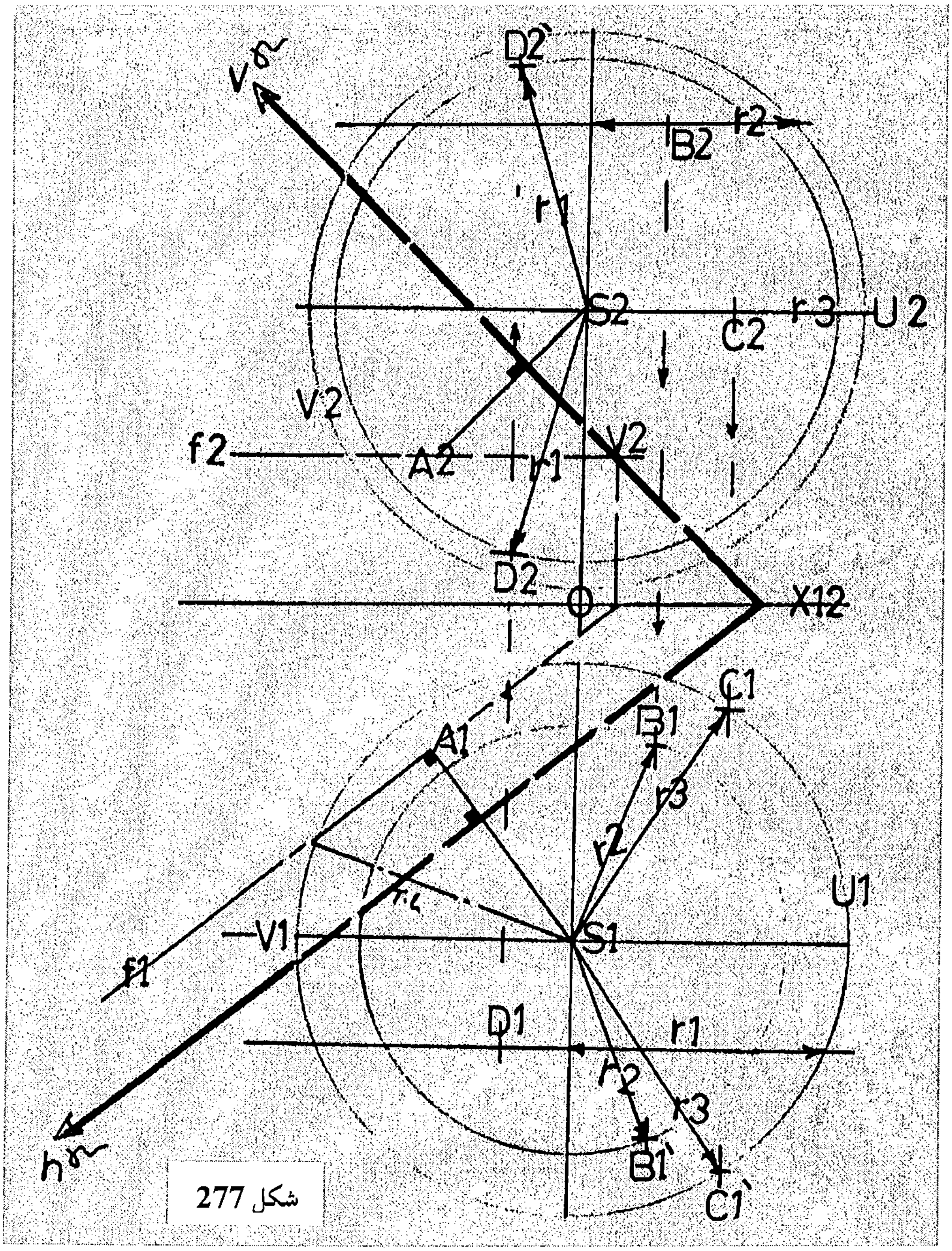
نصل المركز S بالنقطة A الواقعة على المحيط ويكون هذا هو نصف القطر ونأتى بطولة الحقيقى من خلال Z ∆ للطول A_2S_2 وبالتالى نحصل على الطول الحقيقى لنصف القطر نركز فى S ونرسم الدائرة هى السطح الخارجى للكرة شكل 277.

نجد أن B_2 تقع على المحيط ومعلوم موقعها في المستوى الرأسى لذلك نمرر بالنقطة B_2 مستوى أفقـى وبالتـالى هـذا المستوى يتقاطع مع الكرة في دائرة مركزها V_2 علية يمكن أن نركز في S_1 بنصف قطر r_2 ونرسم دائرة فى المسـقط الأفقى هي المحل الهندسي لــ B_1, B_1'، حيث B_1' على النصف الأمامى، B_1على النصف الخلفى شكل 277.

لإستنتاج C_2 نجد أنها تقع على القطر الأعظم وبالتالى تقع على المحيط الأكبر وبالتالى نوقع C_1 على النصف الخلفى، C_1' على النصف الأمامى شكل 277.

لإستنتاج D_2 ، نمرر بالنقطة D1 مستوى وجهى يقطع الكرة في دائرة نصف قطرها r_1 نركز في S_2 و نرسم دائـرة هي hيضا المحل الهندسي للمسقط D_2' على النصف العلوى وD_2 تقع على النصف السفلى شكل 277.

لتعيين المستوى المماس للكرة من النقطة A نجد أن هذا المستوى يكون عمودى علي نصف القطر SA وعلية نمرر بنقطة A مستقيم أفقى عمودى على S_1A_1 نحصل على أثره ، من أثر المستقيم نرسم الأثر الرأسى للمستوى عمودى على S_2 A_2 ومن تقاطعة مع X_{12} نرسم الأثر الأفقى للمستوى عمودى على S_1A_1 شكل 277.

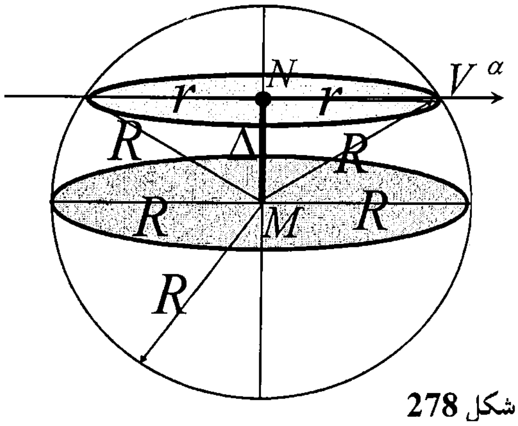

D2`
V
r2
B2
r1
S2
r3
U2
C2
V2
f2
A2
r1
V2
D2
O
X12
C1
B1
A1
r3
r2
U1
V1
S1
f1
D1
r1
r2
r3
h
B1`
C1`

شكل 277

نظرة عامة

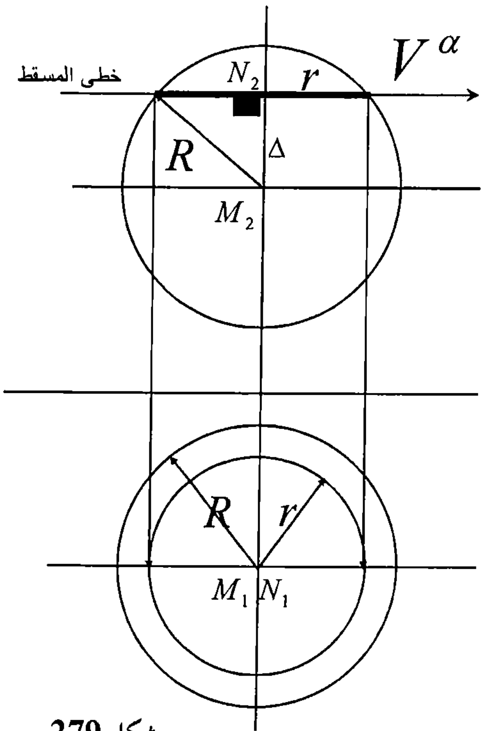
يجب أن تعلم أن معظم تمارين الكرة تتحدث عن مستوى يقطع كرة وفى هذه الحاله فإن المستوى يقطع الكرة فى دائره تسمى دائرة التقاطع وهذة الدائرة تشكل مع المستوى مواصفات خاصة نتحدث عنها من خلال الشكل الموضح وبناء على النتيجه والقاعده الأتيه :

- الخط الواصل من مركز الكرة إلى مركز دائرة التقاطع عمودى على الأثر للمستوى القاطع وبتطبيق هذه القاعده عندما يكون المستوى خطى المسقط يظهر ما يسمى بمثلث الرعب ومسقط مركز دائرة التقاطع .ويتم شرحها وفهمها كالأتي :



شكل 278

من الشكل الفراغى الموضح شكل 278 نجد أن المستوى الأفقى α المُعرف بأثره الرأسى V^{α} يقطع الكرة، ويكون ناتج التقاطع دائرة أفقية مركزها N أى تظهر بشكلها الحقيقى فى المستوى الأفقى لو نظرنا عليها من أعلى لأسفل وتظهر خطية المسقط فى المستوى الرأسى ويبقى علينا أن نوضح التمثيل الوصفى كيفية إستنتاج دائرة التقاطع ونصف قطرها r كما سنرى فى شكل 279.



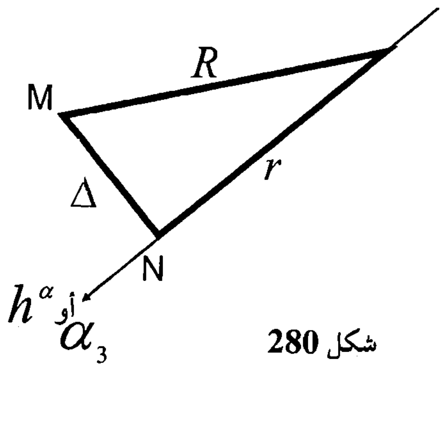
شكل 279

فى شكل 272 لأول باب الكرة ، عندما تقطع مستويات أفقية الدائرة فإن دوائر التقاطع الناتجه لو نظرنا عليها من أعلى لأسفل لوجدنا أن مراكز هذه الدوائر تنطبق على بعضها فى المستوى الأفقى وتكون كلها منطبقة على مركز الكرة، وجميع المراكز للدوائر تقع على المحور الرأسى العام للكرة والذى يظهر فى المسقط الرأسى " كما هو واضح فى

الشكل الفراغى الموجود فى أول باب الكرة شكل 272" . ومن ذلك يتضح أن الدائره الأفقية التى تظهر خطية المسقط فى المسقط الرأسى ومنطبقه على أثر المستوى القاطع تكون أفقية عمودية على المحور العام الصاعد من مركـــز الكـــرة وهذه هى النتيجه المطلوبه وهى: *" الخط الواصل من مركز الكرة لمركز دائرة التقاطع عمودية على الأثـــر للمســـتوى القاطع"*. وكما فى الشكل279 للمساقط الموضحه، فبمجرد توقيع أثر المستوى V^{α} الخطى وكذلك مركز الكرة، من M_2 نسقط عمود على V^{α} فيتقاطع معه فى مركز دائرة التقاطع والتى تقع على خطى المسقط وهى N_2 ومن ذلـــك نستنتج **r** نصف قطر دائره التقاطع ويتشكل المثلث المطلوب **R**و**r** و Δ وهو البعد العمودى بين المركزين. ومن نصف قطر الدائرة يمكن رسم مسقطها الأفقى من مركز الكرة M_1 حيث ينطبق N_1 عليهاوتظهر دائرة حقيقية بشكلها الحقيقى. شكل **279** وشكل **280**

الخلاصة

يجب أن نعلم أنه عندما يكون المستوى خطى المسقط فإن الدائرة تظهر خطية المسقط على أثر المستوى الخطى داخـــل نطاق الكرة وبذلك إما أن نسقط عمود من M_1 على h^{α} ومن M_2 على V^{α} تبعا لمن يكون فى وضع خطى المسقط. وكمثال: وكما فى شكل **280** فإن h^{α} هو الخطى المسقط فإن العمود من M_1 على خطى المسقط يستنتج مســـقط مركز دائرة التقاطع N_1 فى خطى المسقط (ويظهر مثلث الرعب كمـــا فى الأشـــكال **279**و **280** و **281**و **282** حيث نستنتج منه طول نصف قطر دائرة التقاطع r) ونوجد مسقطها مباشرة على العمود الساقط من M_2 على V^{α} فيكون المسقط الرأسى لدائرة التقاطع N_2 ومن هنا ممكن رسم دائرة التقاطع حيث المحور الأكبر يوازى الأثار ونقيس عليه r والمحور الأكبر عمودى عليها. جميع الأعمده الساقطة من مراكز الكرة على الأثار فى خطى المسقط تُظهر مثلث الرعب كما فى شكل **280**



شكل **280**

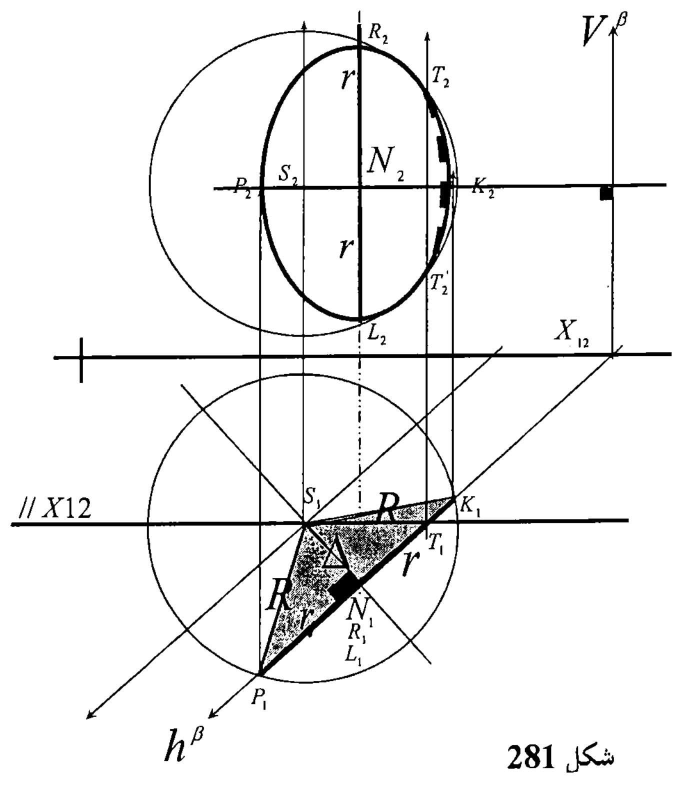
معطيات مثلث الرعب هى R, r, Δ والمشكله هى أنه يكون أحدهم مجهول، فعندما يكون R و r تستنتج من مثلث الرعب فى خطى المسقط وعندما يكون X للمستوى مجهول فهذا يعنى أن Δ ستكون مجهولة ويتم إستنتاجها مـــن خلال العمود الساقط على α_3 ونقيس عليه الإرتفاع Δ الذى سيتم إستنتاجه من بيانات مثلث الرعب الباقيه وهـــى R و r ومثلث فيثاغورث.

تمثيل تقاطع المستوى مع الكرة

1- إذا كان المستوى رأسى

مثل تقاطع المستوى ($6,6.5,\infty$) γ مع الكرة التى مركزها $S(0,4,4)$ ونصف قطرها **3cm**

الحل: لدينا كرة معلوم مركزها **S** وكذلك المستوى القاطع γ والمطلوب تحديد دائرة التقاطع. مباشرة نذهب للقاعدة الشهيرة " مثلث الرعـــب " والـــذى يلزم لتطبيقه أن يكون المستوى خطى المسقط ، فإن لم يكن المستوى خطـــى المسقط نذهب به ونجعله خطى المسقط ونطبق القاعـــدة ثم نعـــود بـــه إلى مساقطه. ولكن فى هذه الحالة المستوى خطى المسقط الأفقى ، وعليه نطبـــق القاعدة مباشرة كما فى شكل **280**. الخط الواصل من مركز الكرة لمركز دائرة التقاطع عمودى على الأثـــر ، لذلك فى شكل **281** نرسم مـــن **S1**



شكل **281**

عمودي على الأثر الأفقى فيتقاطع معه في نقطة **N1** هي مركز دائرة التقاطع فى المسقط الأفقى، نرسم من **S2** عمودي على الأثر الرأسى فيكون المحل الهندسى للمسقط الرأسى لمركز الدائرة للتقاطع N_2 لذلك نصعد من N_1 على العمودى

المقام من S_2 فنوجد N_2 . وبذلك يكون قد تحدد المثلث فى المسقط الأفقى، حيث أن الدائرة خطية المسقط ومحـدد نصف قطرها، وبالتالى يمكن رسم الدائرة بالنظم المعروفه، المحور الأكبر موازى للأثار والأصغر عمودى ثم يـتم قيـاس نصف القطر على المحور الأكبر ونستكمل الشكل 281 كما تعلمنا فى باب الدائرة. شكل 281

لبحث الظاهر والمختفى، ننظر من أسفل لأعلى فى الإتجاه العمودى على خط الأرض الذى ظهرت تحته الدائرة خطـى المسقط (فى هذه الحالة هو X_{12} و إن كان المستوى تحول لخطى بإستخدام X_{13} ننظر عموديا على X_{13}) فننظر على دائرة التقاطع فى الوضع الخطى ونحدد على نقطة تقاطعها مع المحور الأعظم للكرة "والموازى لخط الأرض الذى جعـل المستوى خطى المسقط " نجد أنها T_1 هى النقطة الفاصلة ويتولد T_2, T_2' فى المسقط الرأسى علـى محـيط دائـرة التقاطع، وهما الحد الفاصل بين الجزئين من الدائرةالظاهر و المختفي.شكل 281

عندئذ ولتحديد أيا من الجزئين ظاهر والأخر مختفى عند النظر من أسفل على المسقط الأفقى بداية من نقطة T_1 علـى الجزء الموجود من دائرة التقاطع الخطية مابين T_1 وبين خط الأرض وهى (T_1K_1) هو الجزء الذى يكون المنـاظر فى المسقط الرأسى مختفى لأنه خلف المحور الأعظم للكرة أى فى الجزء الخلفى. أما الجزء الموجود من دائرة التقاطع الخطية مابين T_1 وبين حدود الكرة للخارج وهو(T_1P_1) هو الجزء الذى مسقطه فى الرأسى ظاهر لأنه أمام المحور الأعظـم للكرة أى فى الجزء الأمامى والذى يظهر حقيقى أمام الناظر على للكرة فى الإتجاه المحدد سابقا. شكل 281

1. إذا كان المستوى في وضع عام

مثال: مثل تقاطع المستوى γ (-5,8,6) مع الكرة التى مركزها S(0,5,5) ونصف قطرها cm4

1- نوقع كل من المسقط الرأسى والأفقى لسطح الكرة وهما محيطى الدائرتين (U_1, U_2) , (V_1, V_2) و المراكز S_2 وS_1، وكذلك المستوى γ شكل 282

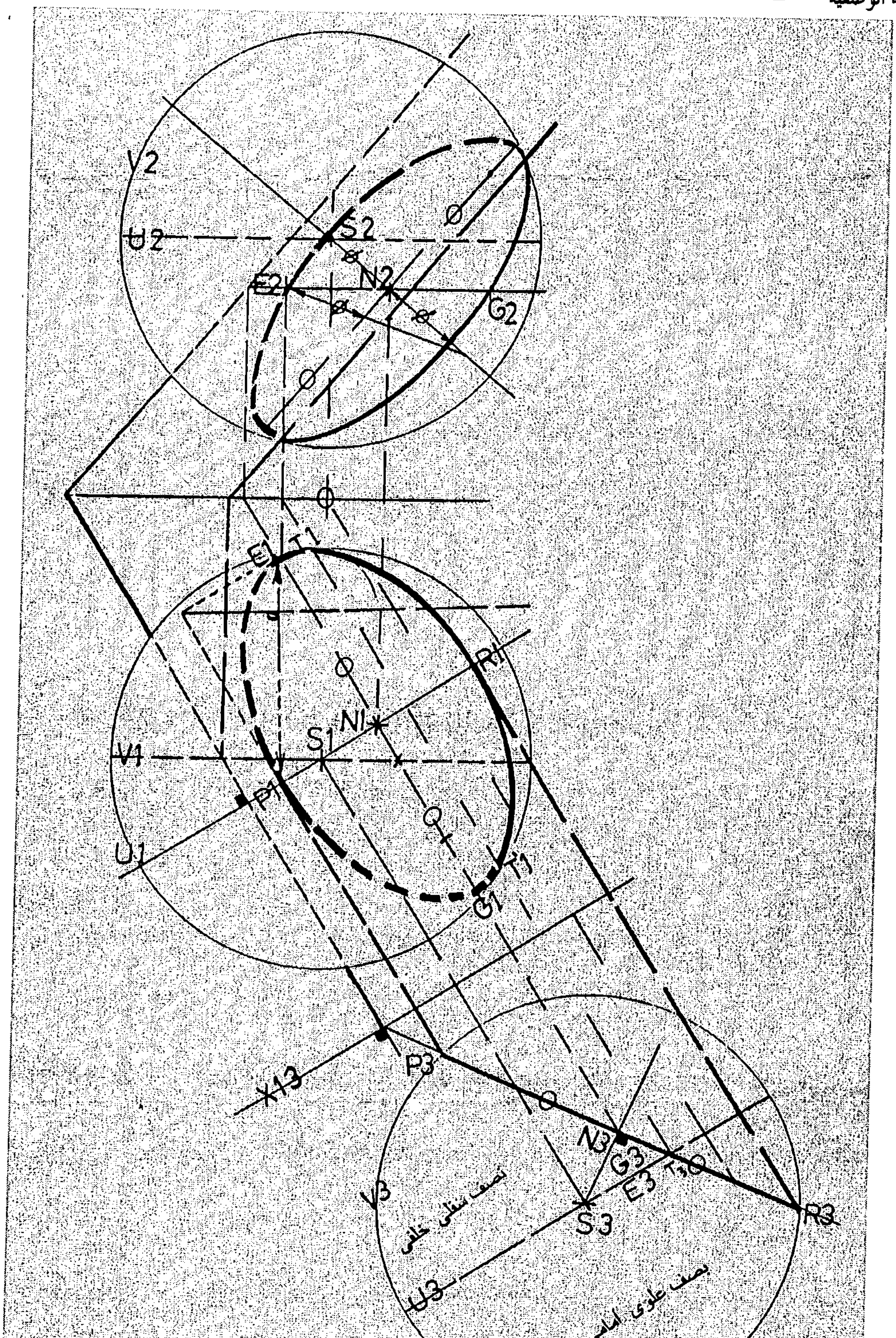
2- لإيجاد دائرة التقاطع للمستوى مع الكرة نجد أن المستوى فى وضع عام وليس خطى المسقط سواء فى الأفقـى أو الرأسى، لذلك نحول المستوى مباشرة لخطى المسقط حتى نستطيع تحديد كل المطلوب.

3- نحول المستوى لمستوى عمودى (إسقاط مساعد) حيث تظهر دائرة التقاطع فية خطية ونعين مركز الكرة S_3 .

4- للحصول على مركز دائرة التقاطع نطبق قاعدة مثلث الرعب حيث نسقط من S_3 عمودى على أثر المستوى γ_3 يتقاطع معه فى N_3 مركز الدائرة ، وكذلك من S_1 عمودى على الأثر الأفقى ومن S_2 عمودى على الأثر الرأسى ثم نعود من مركز الدائرة N_3 إلى المسقط الأفقى لإيجاد N_1 على العمودى من S_1 على h^γ ومنها نصعد لأعلى على العمودى من S_2 على V^γ فنوجد N_2 ، وهما مساقط مركز دائرة التقاطع. شكل 282

5- من الشكل 282 في المستوى المساعد للكرة يصبح واضح كل من المحور لأعظم U_3 الموازى لخط الأرض X_{13} وكذلك مسقط دائرة التقاطع الخطى R_3 P_3 وبالتالى منها أصبح إسقاطهم مباشرة هما طول المحور الأصـــغر فى المسقط الأفقى وكذلك طولهم الحقيقي وهو طول المحور الأكبر وبالتالى يتم الإسقاط مباشرة على المستوى الأفقى ونستطيع رسم الضلع مباشرة .

6- من تقاطع دائرة التقاطع مع المحور الأعظم نحصل على النقطة T_3 وهي الفيصل بين الجزء من القطع الموجــود في النصف الأمامي و النصف الخلفى حيث الجزء T_3R_3 ظاهر (في الأمامي) و T_3 P_3 في النصف الخلفي مختفي. ويمكن لك أن تحول المستوى لخطى المسقط إعتماد على المستوى الرأســى وإســتخدام مســتوى مســاعد X_{24}عمودى على المستوى الرأسى


V2
U2
S2
E2
N2
G2
E1
T1
R1
N1
S1
V1
P1
U1
T1
G1
X13
P3
N3
G3
E3
S3
R3
V3
U3

شكل 282

مثل الدائرة الرأسية C التى مركزها M(8,7,4) والتى تقع نقطة N(6,9,6)على محيطها، ثم مثل الكرة S التى تقطع المستوى الأفقى فى دائرة نصف قطرها 2cm وتقع الدائرة C على سطحها

الحل: فى حل هذا المثال يراعى أن تأتى بأدواتك وتبدأ فى تنفيذ الحل تباعا

الحل يكون فى إسلوب تحليل المعطيات والإمعان فى التفكير فيه، من شكل **283** نجد أولا نتيجة لأن الدائرة رأسية فهى تقع فى مستوى رأسى وهو خطى المسقط الأفقى وبالتالى فإن مسقطها الأفقى عبارة عن خط مستقيم ومسقطها الرأسى قطع ناقص. ونقطة **N** تقع على الدائرة، وبذلك نكون حددنا مستوى الدائرة والمسقط الأفقى للدائرة على الأثر الأفقى للمستوى وهو M_1N_1 حيث نوصلهم معا يكون h^α. وبالتالى أصبح لدينا مستوى الدائرة ومركزها ويبقى نصف القطر وهو موجود ولكن ليس بطوله الحقيقى وبالتالى نوجد الطول الحقيقى **MN** فيكون هو نصف قطر الدائرة ، ونحدد للدائرة بعد ذلك المحور الأكبر والأصغر فى المستوى الرأسى وكذلك مسقطها الأفقى على خطى المسقط شكل **283**.

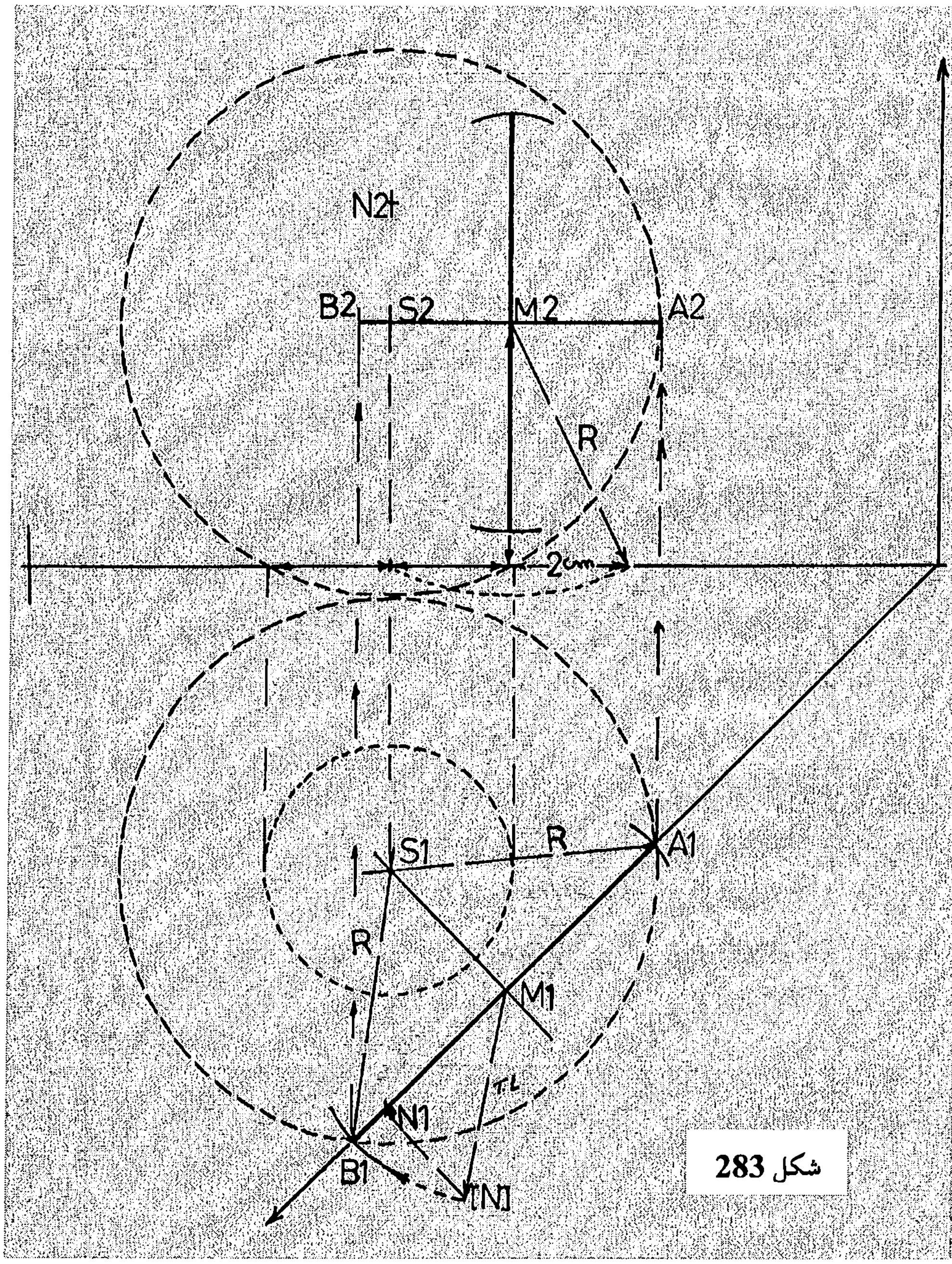
لتحديد مكونات الكرة وهى **S,R, position of center** يتم التفكير التسلسلى كالاتى:

–الخط الواصل من مركز الكرة لمركز دائرة التقاطع عمودى على الأثر ، فإذا مررنا العمودى على الأثر من مركز الدائرة فى كل من المسقط الرأسى والأفقى يكون هو المحل الهندسى لمركز الكرة، ولكن على الأقل أصبح لدينا المحل الهندسى الرأسى لمركز الكرة وهو خط يمر بـN_2 ويوازى خط الأرض لأنه عمودى على الأثر الرأسى للمستوى الخاص بالدائرة شكل **283**.

–مسقط الكرة الرأسى يقطع المستوى الأفقى فى دائرة وبالتالى فهى تظهر من تحت خط الأرض ولكن نصف قطرها يتحدد على خط الأرض لأنها تعتبر دائره فى مستوى أفقى ومسقطه الرأسى خطى. وعليه يتم عمل مثلث كما فى شكل **283**من أى نقطة على المحل الهندسى S_2 ، ونحن إخترناها من مركز الدائرة. هذا المثلث مكوناته هى الإرتفاع عن خط الأرض ثم نصف قطر دائرة التقاطع **2cm** وبالتالى نستنتج نصف قطرالكرة **R** " هذة الحالة تشبه الشكل الموجود والمستخدم فى أول الباب لشرح الكرة"

–نأخذ نصف قطر الكرة المستنتج "وذلك لإستكمال مثلث الرعب الأفقى" ونقوم بالنزول به للمسقط الأفقى ونركز فى أى منA_1 أو B_1 ونقطع المحل الهندسى الأفقى للكرة فنوجد المسقط الأفقى لمركز الكرة ومنه نوجد الرأسى

-نصنع كرة بنصف القطر من S_2وS_1 فنجدها تحقق المطلوب.



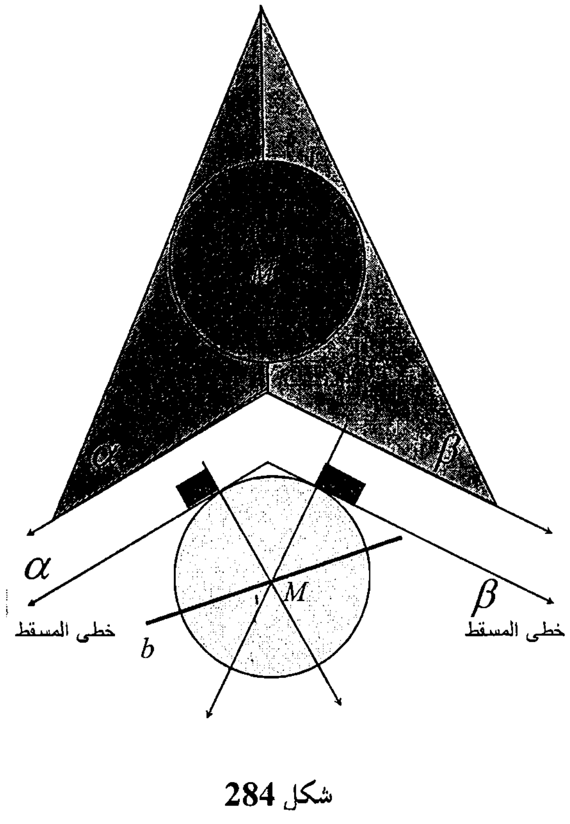
شكل 283

مثل كرة تمس المستويين [$A(9,2,1), B(5,7,4), C(4,4,1)$] α

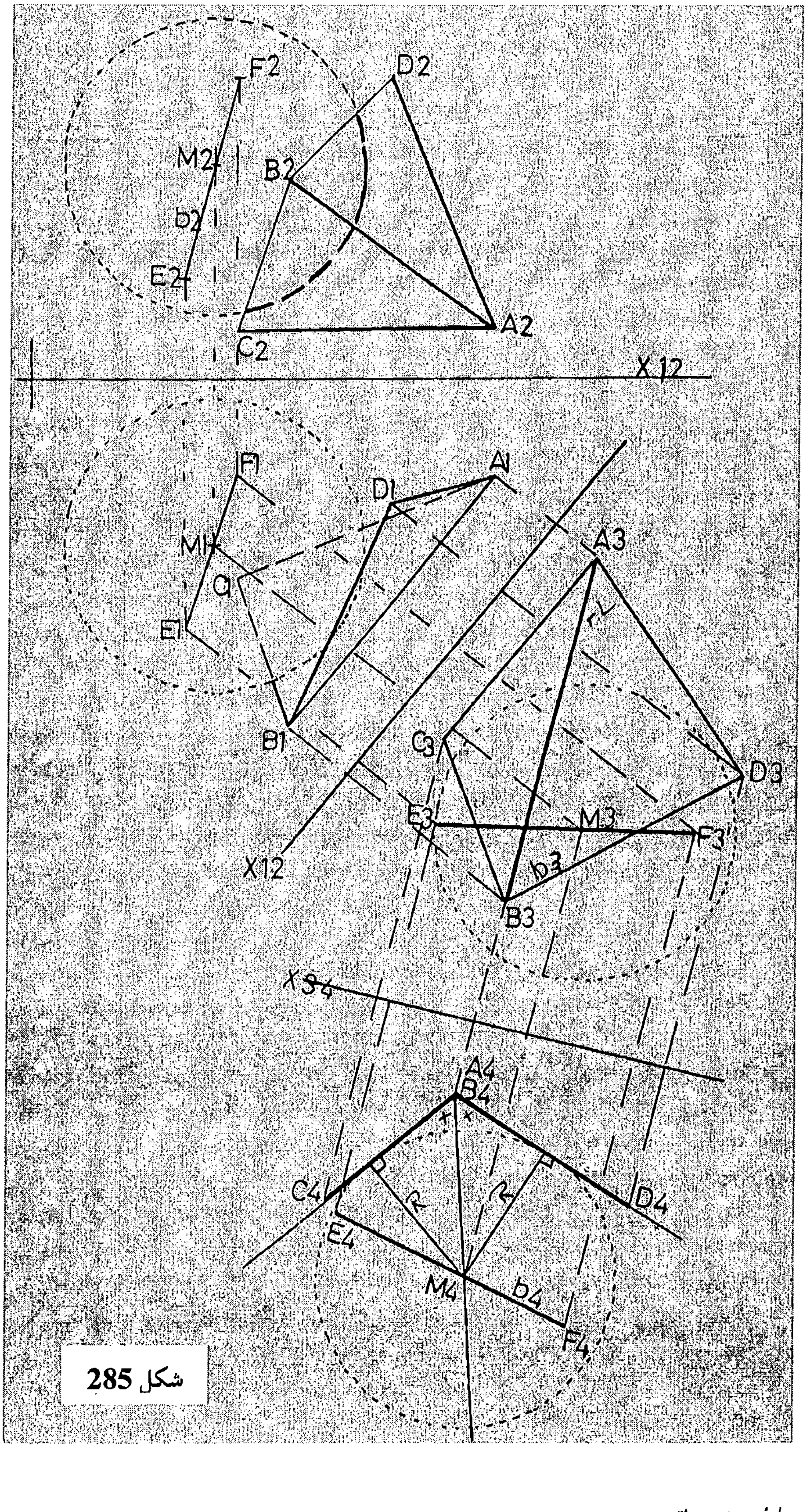
و [$A,B, D(7,2.5,6)$] β ويقع مركزها على المستقيم [$F(4,2,6), E(3,5,2)$] b

الحل:

لاحظنا فى باب الإسقاط المساعد كيفية إيجاد الزاوية الزوجية بين المستويين وهى الزاوية التى تظهر بالإسقاط فى الإتجاة الذى يكون فيه مسقط خط التقاطع نقطة كما بالشكل **284**. وعليه نحول خط التقاطع لنقطة بإستخدام إسلوب الإسقاط المساعد للمستقيم فيتحول معه مباشرة المستويين إلى خطى المسقط كما يظهر فى الشكل **284** وكذلك فى الحل بالهندسة الوصفية شكل **285**. فى الإسقاط المتتالى كانت الثلاث نقاط **A,B,D** على خط واحد وكذلك **A,B,C** وأصبحا يشكلا زاوية معا، يتم تنصيفها فنوجد المحل الهندسى لكل الدوائر التى تمس المستويين فيقطع المحل الأخر وهو المستقيم **b** فى نقطة هى مركز الكرة المطلوب وكذلك تم تحديد نصف القطر للكرة فنعود بالمركز ونرسمه.شكل **285**

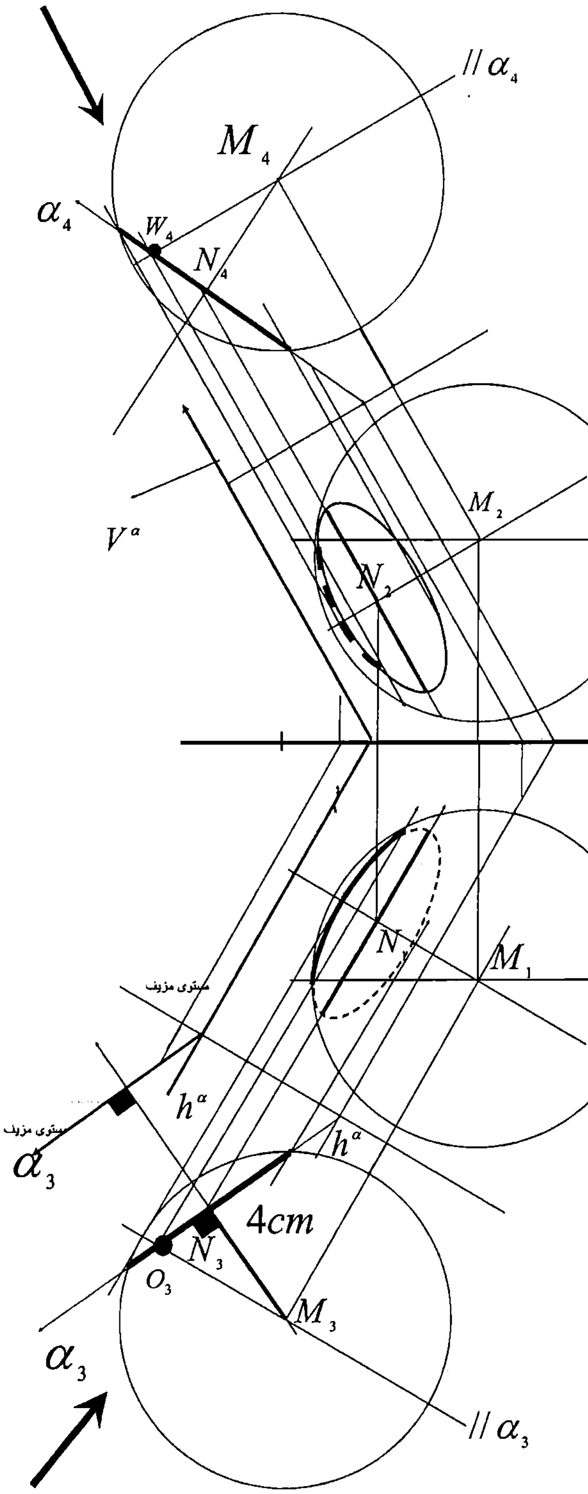


شكل **284**


F2
D2
M2
B2
b2
E2
A2
C2
X 12
F1
A1
D1
M1
a
E1
A3
B1
C3
D3
E3
M3
F3
X12
b3
B3
X34
A4
B4
C4
D4
E4
M4
b4
F4

شكل 285

المعلوم كرة مركزها M (6,7,6) و نصف ، 5 cm مثل المستوى $\alpha(x,60°,120°)$
الذى يقطع الكرة فى دائره نصف قطرها يساو 3 cm
ثم مثل دائرة التقاطع



شكل 286

دائما عندما نتحدث عن مستوى قطع كرة فإن هذا يؤدى إلى الذهاب بالمستوى إلى α_3 و α_4 حيث يتم التسلسل فى

شكل 286 الأتى: 1- من M_3 عمود على α_3 2- من M_1 عمود على h^{α}

3- من M_2 عمود على V^{α} 4- من M_4 عمود على α_4.

من الأعمده على α_3 و α_4 نستنتج مساقط مركز دائرة التقاطع N_3, N_4 ثم نعود بهما على الأعمده المقامة من M_1 على h^{α} ومن M_2 على V^{α} فنستنتج N_1, N_2. وبالتالى أصبح لدينا مراكز الدوائر وكذلك نصف القطر للدوائر والمستنتج من خطى المسقط. ويمكن الإستغناء عن α_4 ونأتى بالمسقط الرأسى للمركز بالإسقاط، ولكن تم عملها بهذا الإسلوب لتُعود الطالب على إستخدام إسلوب خطى المسقط فى إستنتاج المراكز.شكل 286

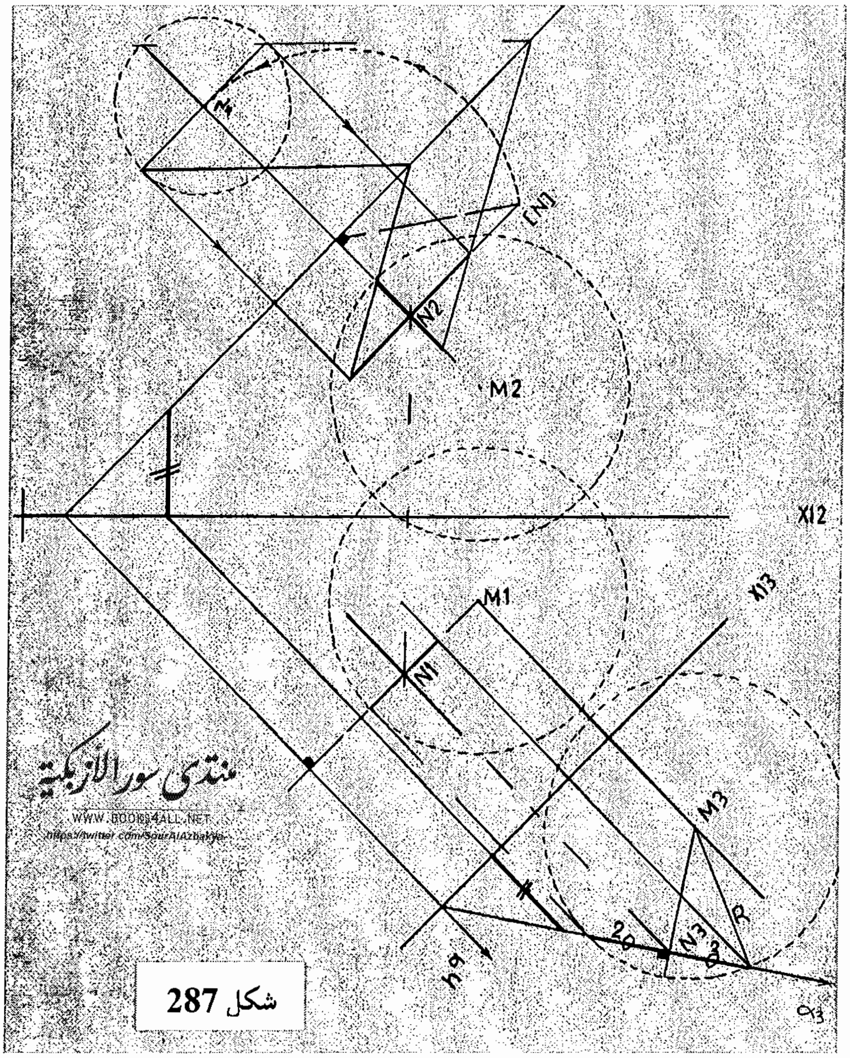
الظاهر والمختفى

نرسم من مركز الكرة فى خطى المسقط موازى لخط الأرض الذى جعل المستوى خطى وهما $\alpha_4//$ و $\alpha_3//$، فى الإسقاط فى π_3 الموازى $\alpha_3//$ من مركز الكرة يقطع الدائره الخطى فى نقطة وهى O وهى تفصل الدائره لجزئين، جزء ظاهر وجزء مختفى ، ولتحديدهما ننظر فى الإتجاه العمودى على "الخط الموازى لخط الأرض والمسوم من مركز الكرة" أى فى إتجاه السهم الموضح فى شكل 286 ، فنجد جزء من الدائرة يقع قبل هذا الموازى وحتى نقطة O_3 وهو أول مايقابل النظر أى قبل نقطة O_3 هذا الجزء هو ظاهر والباقى منقط كما يتضح فى الشكل 286، وكذلك بالنسبة لنقطة W_4 ننظر من الإتجاه الأعلى وبنفس الإسلوب فى شكل 286.

مثال: مثل كرة مركزها $M(11,2,3)$ وتقطع المستوى α $(1,135^0,45^0)$ فى دائرة نصف قطرها 2cm، مثل دائرة التقاطع

الحل: فى هذه الحالة المعلوم شكل 287 هو دائرة التقاطع ونريد أن نمثل الكرة وكما سبق الذكر أن مثلث الرعب هو الذى يربط الإثنين معا ولكن فى خطى المسقط حتى نستطيع تطبيق القاعدة. لذلك نحول المستوى لخطى المسقط فى المستوى الثالث "فى الثلاثات" ونذهب بمركز الكرة فنحصل على M_3 وخطى المسقط. نبدأ بتطبيق القاعدة ونسقط العمود حيث العمود الساقط من مركز الكرة عمودى على الأثر يمربمركز دائرة التقاطع ويتم ذلك فى كل المستويات الأول والثانى والثالث. العمود الساقط من M_3 يقطع خطى المسقط فى نقطة هى N_3 مركز دائرة التقاطع، ومنها نقيس

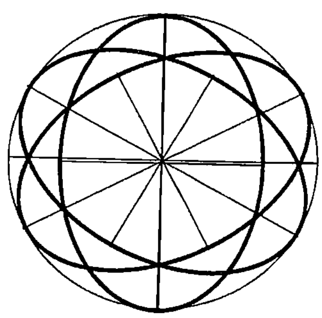
2cm يمن وشمال فنوجد نقاط نهاية دائرة التقاطع والتي يمكن أن نصلها بمركز الكرة فيكون هذا هو نصف قطر الكرة ونمثل الدائرة ، وفى المسقط الرأسى أستخدمنا الدوران لكى نوضح مسقط الشكل الحقيقى لدائرة التقاطع ومنها نستنتج المحور الأكبر فى المسقط الرأسى بالدوران كتدريب للطالب.



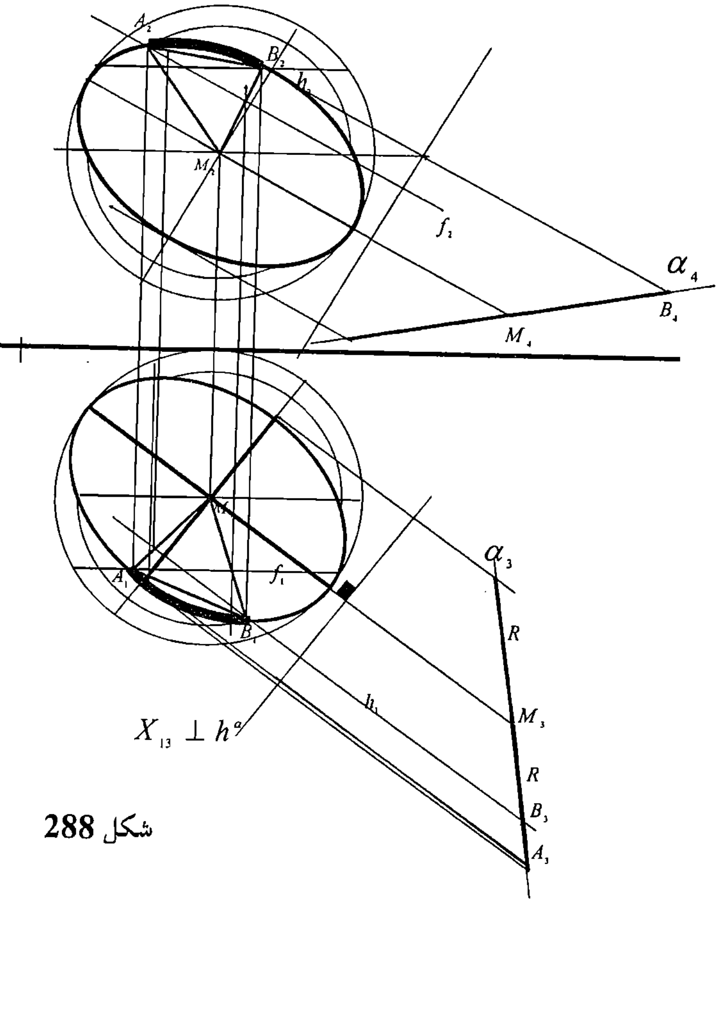
شكل 287

مثل أقصر مسار بين النقطتين A,B على سطح الكرة التى مركزها M (5,4,5) و نصف قطرها 4cm إذا علمت أن B (6,Y,7), A (3,6,Z) و أن نقطة A تقع على النصف العلوى للكرة ونقطة B تقع على النصف الأمامى للكرة

الحل: الدائرة العظمى هى الدائرة التى مركزها هو مركز الكرة ونصف قطرها نصف قطر الكرة "كما يتضح ف الشكل **288** للدوائر العظمى" ، وبالتالى لرسم دائرة عظمى فقد أصبح معلوم مركز الدائرة ونصف قطرها ولكن يبقى مستوى الدائرة، ويكون هو الذى يتكون من الثلاث نقاط **M,A,B** . وبناء على ذلك يتم رسم الدائرة العظمى داخل الكرة وأقصر مسار يظهر عليها هو من **B** إلى **A** ف المسقط الأفقى وليس العكس لأن العكس هو أكبر مسار على سطح الكرة بين النقطتين. وأيضا يتم تحديده ف الرأسى كما هو موضح بالرسم شكل **288**.



دوائر عظمى داخل كرة

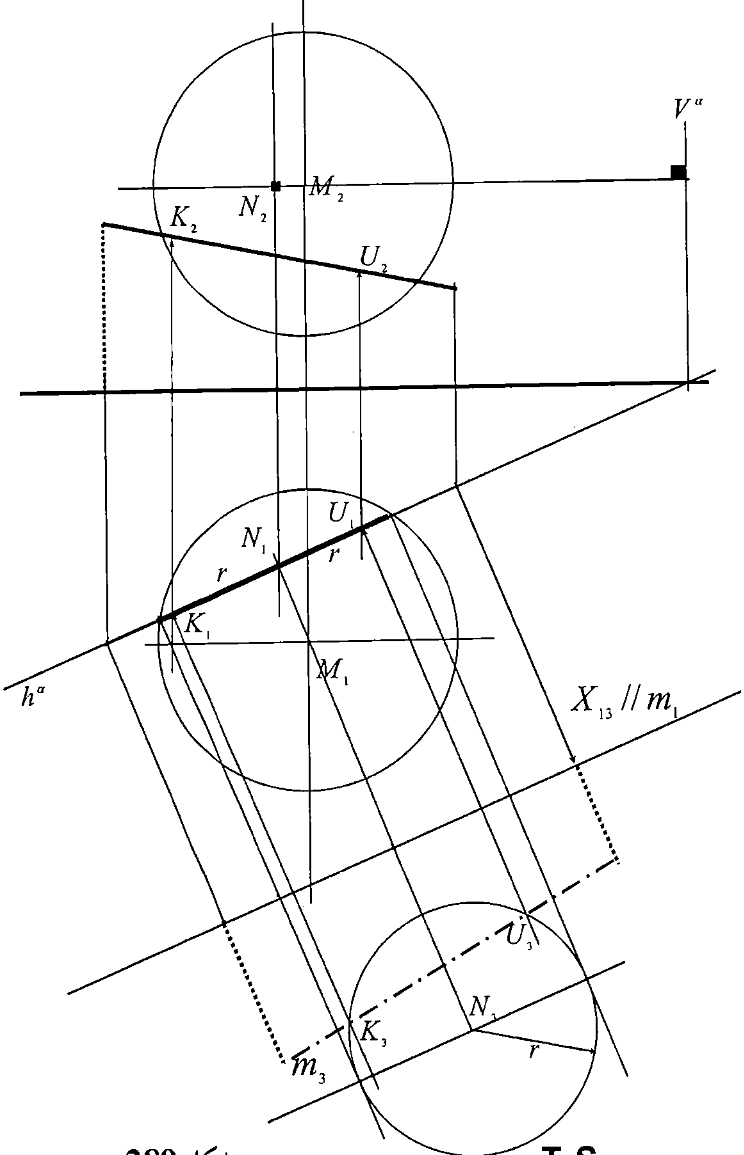


شكل **288**

نقطة تقاطع مستقيم مع كرة

نقطة تقاطع مستقيم مع كرة يتحدد بنفس إسلوب إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى حيث نمرر بالمستقيم مستوى فيقطع الكرة فى دائرة، هذه الدائرة تتقاطع مع المستقيم فى نقطتين هما نقطتى تقاطع المستقيم مع الكرة فى شـــكل **289** ولكن كالأتى :

مثل نقطتى تقاطع المستقيم m مع سطح الكره التى مركزها M (4,5,4) و نصف قطرها 3 cm حيث m [0,5,3), (7,2,2)]



شكل **289**

1. بتمريـــر مســـتوى خـــاص بالمستقيم فيقطع الكرة فى دائـــره خطى المسقط، فنوجـــد مركـــزى دائرة التقاطع ونصف قطرها **N,r** بإستخدام مثلث الرعب، حيـــث نسقط عمود من مركز الكرة على خطى المسقط فنوجـــد المســـقط الأفقى لمركز دائـــرة التقـــاطع ثم نوجد مسقطه الرأسى **N_2** علـــى العمود الساقط مـــن **M_2** علـــى الأثر الرأسى
2. نوجد الشكل الحقيقى لدائرة التقاطع والمستقيم "يجب أن تلاحظ أن المستقيم والدائرة الأن يقعان فى مستوى واحد وهـــو المســـتوى القاطع للكرة" ، ونأتى بالشـــكل الحقيقى بأن نرسم **X_{13}** موازى للأثر الأفقى لمستوى الدائره وهو نفسه مـــوازى ل **m_1** فيظهـــر المســـتقيم **T.L** وكذلك الدائرة بشكلها الحقيقى حيث نرسم الدائرة بنصف قطرها المحدد من تقاطع المستوى مع الكرة .

3. نحدد نقطتى التقاطع فى الشكل الحقيقى "فى الثلاثات" بين مسقط المستقيم والدائرة الحقيقيــة وهمــا K_3,U_3 نرجعهم إلى مساقطهم الرئيسة على المستقيم.

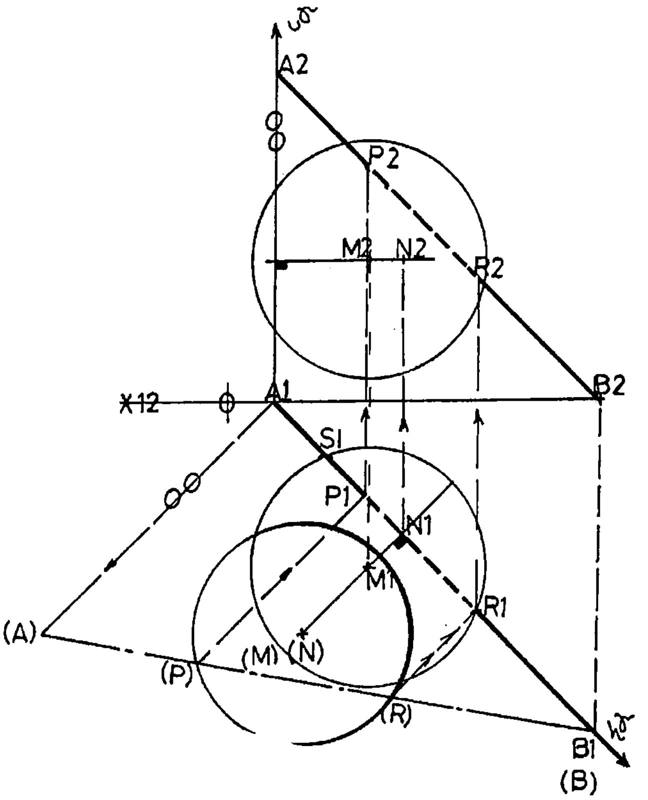
مثل بإستخدام الدوران نقطتى تقاطع المستقيم مع الكرة التى مركزها M(2,3.5,3) ونصف قطرها 2.5 cm مع المستقيم [b[A(1,0,7), B(7,7,0)

الحل:

1– نمرر بالمســتقيم مســتوى خــاص عمودى ، فيقطع الكرة فى دائرة .شكل **290**

2 _ نسقط من M_1 عمودى على h^{γ} " وكذلك من M_2 " فيتقاطع معــه فى N_1 " بنظرية مثلث الرعــب أو الخــط الواصل من ... إلى... يكون ...." ومن ثم نوجد N_2. شكل **290**

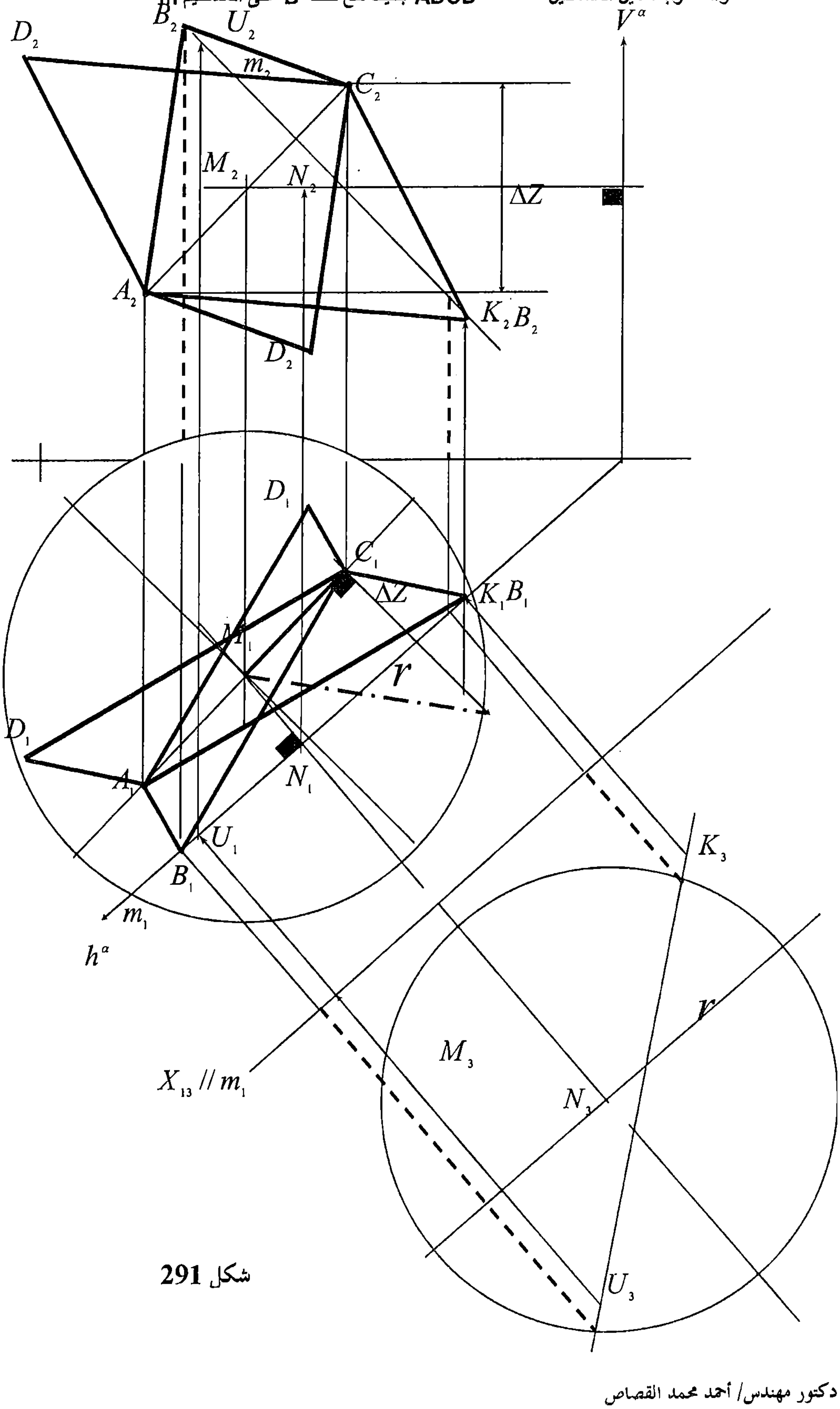
3_ بالدوران حــول الأثــر الأفقــى للمستوى بالنبة للمسقط N_1 نوجــد **(N)** وكذلك **(A),(B)**



شكل **290**

4_ نرسم من مركز الدائرة دائرة حقيقية وبنصف قطرها الذى ظهر فى خطى المسقط وهو N_1S_1 فتظهر نقطتى التقاطع **(R) ,(P)** ونعود بهم على مساقط المستقيم شكل **290**

المعلوم النقطتان A (2,6,3), C (6,2,7) و المستقيم m [(3,7,8), (8,3,3)]
والمطلوب تمثيل المستطيل ABCD بحيث تقع نقطة B على المستقيم m



شكل 291

المستطيل ABCD شكل 291 فيه الزاويه ABC قائمة فهى زاوية محيطية لذا تقع إما على محيط دائره أو محيط كرة وأن AC قطرها ، وهى لو على محيط دائره يكون المستقيم m مماس لها ومن المعروف أن المماس للـــدائره يكـــون فى مستواها ولكن AC , m شماليين وبالتالى m ليس مما س للدائرة وبالتالى المحل الهندسى للنقطة B ليس دائرة وإنمـــا كرة وتصبح B نقطة على سطحها وعلى المستقيم m وهى نقطة تقاطعهما ويكون AC هو قطر الكرة. هذا المثال تطبيق مباشر على نقطة تقاطع مستقيم مع كرة، والمثال له حلان ناتج من نقطتى تقاطع المستقيم مع الكرة هما إحتمـــالى تواجد نقطة B مرتين.

تمارين الكرة

1- مثل الكرة التي مركزها $N(4,7,5)$ وتقع نقطة $A(2,4,3)$ على سطحها واذا كانت النقطة $P(6,9,z)$ تقع في النصف العلوي لسطح الكرة ومثل P والمستوى α المماس لسطح الكرة عند P .

2- مثل الكرة التي فيها $A(7,8,3)$ و $C(3,2,7)$.

3- مثل الكرة التي مركزها $M(11,4,5.5)$ وتقع نقطة $A(9,1.5,7)$ على سطحها واذا كانت النقطة $P(12.5,3,z)$ تقع في النصف العلوي لسطح الكرة فمثل اقصر مسار يقع على سطح الكرة ويصل بين النقطتين A,P .

4- مثل كرة تمس π_1 و π_2 ويقع مركزها على المستقيم

$m[A(6,2,6), B(1,5,2)]$

5- عين مركز ونصف قطر الدائرة C التي تمس اضلاع المثلث ABC حيث $A(2,3,1), B(7,10,1), C(2,10,7)$ ثم مثل الكرة التي نصف قطرها 5 سم وتقع الدائرة C على سطحها .

6- المعلوم النقطة $A(7,4.5,8.5)$ ومستوى $\alpha(9,160^0,135^0)$ تقع فيه النقطة $P(3,2,z)$ مثل كرة تمس المستوى α عند نقطة P وتمر بالنقطة A .

7- مثل دائرة تقاطع كرة مركزها النقطة $N(8,3,3.5)$ ونصف قطرها 3 سم مع مستوى α في الحالات الاتية :

اولا : α مستوى رأسي $\alpha(.5,30^0,?)$.

ثانيا : α مستوى عمودي على π_2 $\alpha(.5,?,45^0)$

ثالثا : $\alpha(0,60^0,45^0)$.

8- مثل دائرة رأسية مركزها $M(8,7,4)$ وتقع النقطة $P(6,9,6)$ على محيطها ثم مثل الكرة التي تقع هذه الدائرة على سطحها وتقطع π_1 في دائرة نصف قطرها 2 سم .

9- المعلوم مستوى رأسي يمر بالنقطة (A (12,3,2 ويميل على π_2 بالزاوية 45^0 ثم مثل الحل الهندسي لنقط المستوى التي نسبة بعديها عن النقطتين (P (6,4,4 و (Q (1,2,1 تساوي 1 : 2 .

10- المعلوم النقطتين (A (6,4,4 و (B (1,2,1 ومستقيم افقي h يمر بالنقطة (P (13,1,8 ويميل على π_2 بالزاوية 45^0 ثم مثل نقطة Q على h تكون نسبة بعديها عن النقطتين A , B تساوي 1 : 2 .

11- مثل الكرة التي مركزها النقطة (N (11,2,3 وتقطع المستوى [α [0,135^0,45^0 في دائرة نصف قطرها 2 cm ثم مثل دائرة التقاطع .

12- مثل نقطتي تقاطع سطح كرة مركزها النقطة (N (3,4,3.5 ونصف قطرها 2.5 cm مع مستقيم m في الحالتين الاتيين :

اولا : المستقيم m افقي يمر بالنقطة (P (6.5 , 1, 1.5 ويميل على π_2 بالزاوية 45^0 .

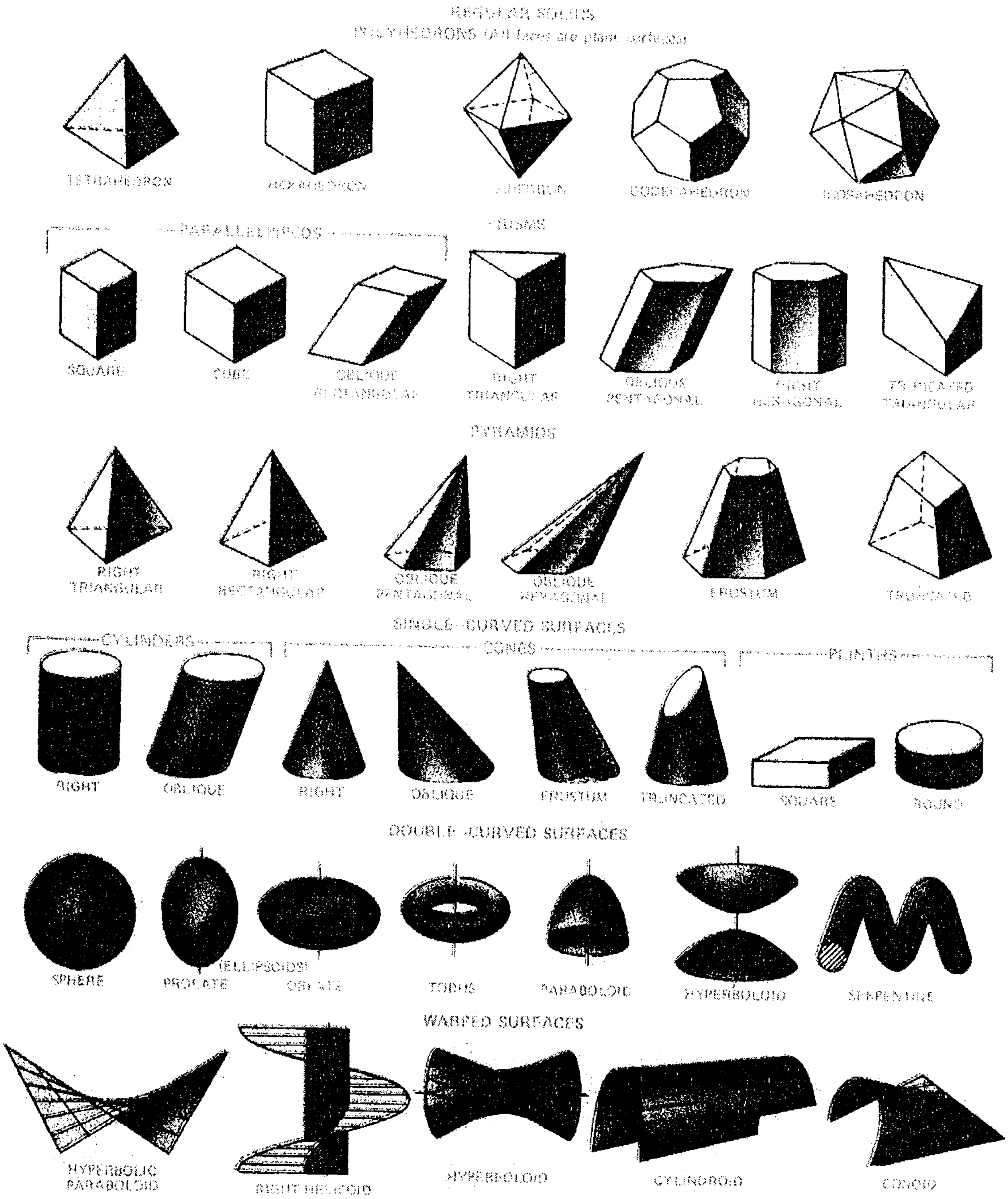
ثانيا : (m [P (8,7,0) , Q (2,0,7 .

13- المعلوم النقطتين (A (5,3,4 و (B (1,1,1 ومستقيم m حيث : [(M [P (10,1.5,0), Q (7,4,6.5 مثل نقطة N على m بحيث يكون AN : BN = 2 : 5 اذكر الحل الفراغي ثم مثل بالاسقاط .

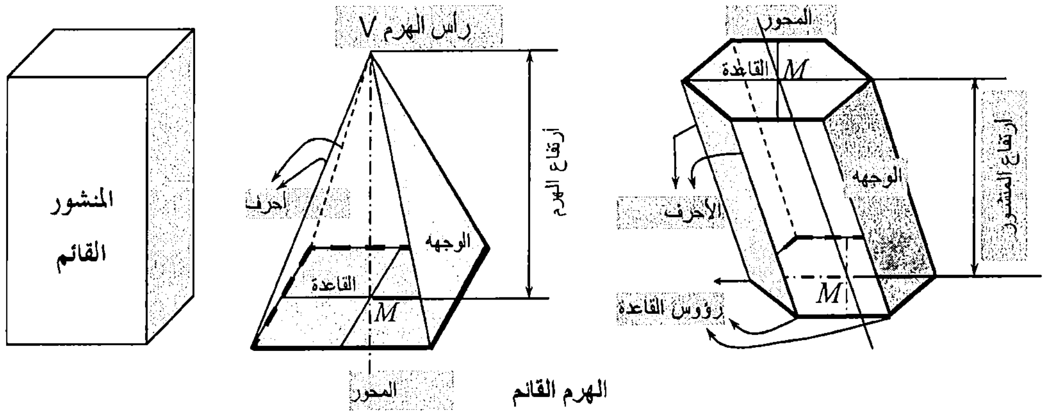
الباب الحادى عشر

كثيرات السطوح

كثـــيـــرات الســـــطــوح



شكل 292



شكل 293

1. تعريف: كثيرات السطوح عبارة عن أجسام محددة بمستويات من جميع جهاهما شكل 292و شكل 293 تُسمى أوجه، وهذه الأوجه تتقاطع فى مستقيمات تُسمى أحرف الجسم والأحرف تتلاقى فى نقاط تُسمى رؤوس الجسم.

وتنقسم كثيرات السطوح إلى قسمين هما: 1- كثيرات السطوح المنتظمه 2- الهرم والمنشور

2. كثيرات السطوح المنتظمة : هى عبارة عن كثيرات السطوح التى جميع أوجهها عبارة عن مضلعات منتظمة ومنطبقة، وتتبع نظرية أويلر فى أن:

1- مجموع الزوايا المستوية المحصورة بين الأحرف والتى تمر بأى رأس من رؤوس كثيرات السطوح المنتظمة يجب ألا تقل عن 360^{O} وألا يتحول إلى مستوى

2- أوجهه كثيرات السطوح المنتظمة عبارة عن مضلعات منتظمة ومنطبقة وزواياها جميعا متساوية

3- كثيرات السطوح المنتظمة توجد كرة تمر بروؤسها

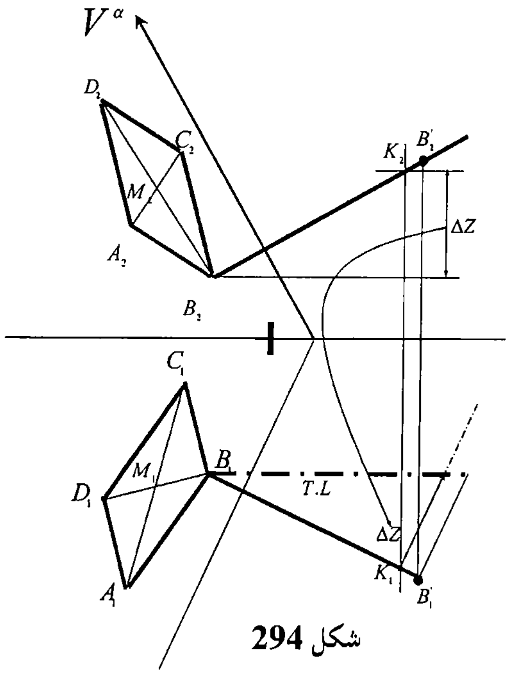
كثيرات السطوح ماهى إلا أجسام متعدده الأوجهه شكل 293 ويمكن التعبير عنها بأنها كثيرات سطوح لها أحرف وقاعدة وتتمحور حول محور عام . وكثيرات السطوح المنتظمه القائمة هى التى يكون فيها المحور عمودى على مستوى القاعدة، أما كثيرات السطوح المائلة فيكون فيها المحور مائل على القاعدة.ونحن هنا نهتم بوضع أسلوب للتفكير لسهوله التعامل مع التمارين ونتبع هذه الخطوات دائما. فعند التفكير فى حل تمارين كثيرات السطوح تذكر دائما أنك لابد أن تُكمل تمثيل القاعدة ثم تمثيل الإرتفاع. وعليه فالتفكير محصور فى إتجاهين (القاعدة والإرتفاع)

القاعدة كيف تفكر لإستكمال شكل القاعدة

بالنسبه لإستكمال القاعدة عامة فإنك لابد أن تدفع المعطيات الموجوده أمامك فى التمرين إلى إيجاد على الأقل أى نقطتين فى القاعدة سواء كانت القاعدة واقعة فى المستوى الأفقى أو فى أى مستوى أخر وبمجرد الحصول على النقطتين فى القاعدة نرى إذا كانت القاعدة واقعه فى أى مستوى يتم تحويل المستوى إلى شكله الحقيقى " بإستخدام الإسقاط المساعد او بالدوران" لإستكمال شكل القاعدة بنظم وخواص الهندسه المستويه لشكل القاعدة، أما إذا كانت القاعدة فى المستوى الأفقى او المستوى الرأسي يتم إستكمال القاعدة مباشرة بإستخدام خواص الهندسه المستويه لشكل القاعدة.

شكل **293**

الإرتفاع



شكل **294**

بالنسبة للإرتفاع فى للمنشور القائم المنتظم والهرم القائم المنتظم هو مستقيم عمودى على مستوى القاعدة من مركزها بالنسبة للهرم، ومن أى رأس من رؤوس القاعدة أو مركز القاعدة بالنسبه للمنشور. وبالتالى لتحديد الإرتفاع فى شكل **294** على أحد الأرف الخارج من أحد رؤوس القاعدة **B**، يتم إختيار أى نقطة على الإرتفاع ثم نأتى بالطول حتى هذة النقطة ونحصل على إتجاه الطول الحقيقي ثم نقيس عليه الطول المطلوب ثم الرجوع به لتحديد الإرتفاع. كما تم فى باب المستقيم المثال الموضح شكل **294** يبين كيفية قياس إرتفاع المنشور من أحد رؤوس القاعدة. ويتم كالأتى:

1. نقيم مستقيم عمودى على مستوى القاعدة (على الأثار) ويكون مُمثل لأحد الأحرف أو المحور من أى رأس من رؤوس القاعدة بالنسبة للمنشور القائم، (أو من مركز قاعدة الهرم المنتظم القائم)

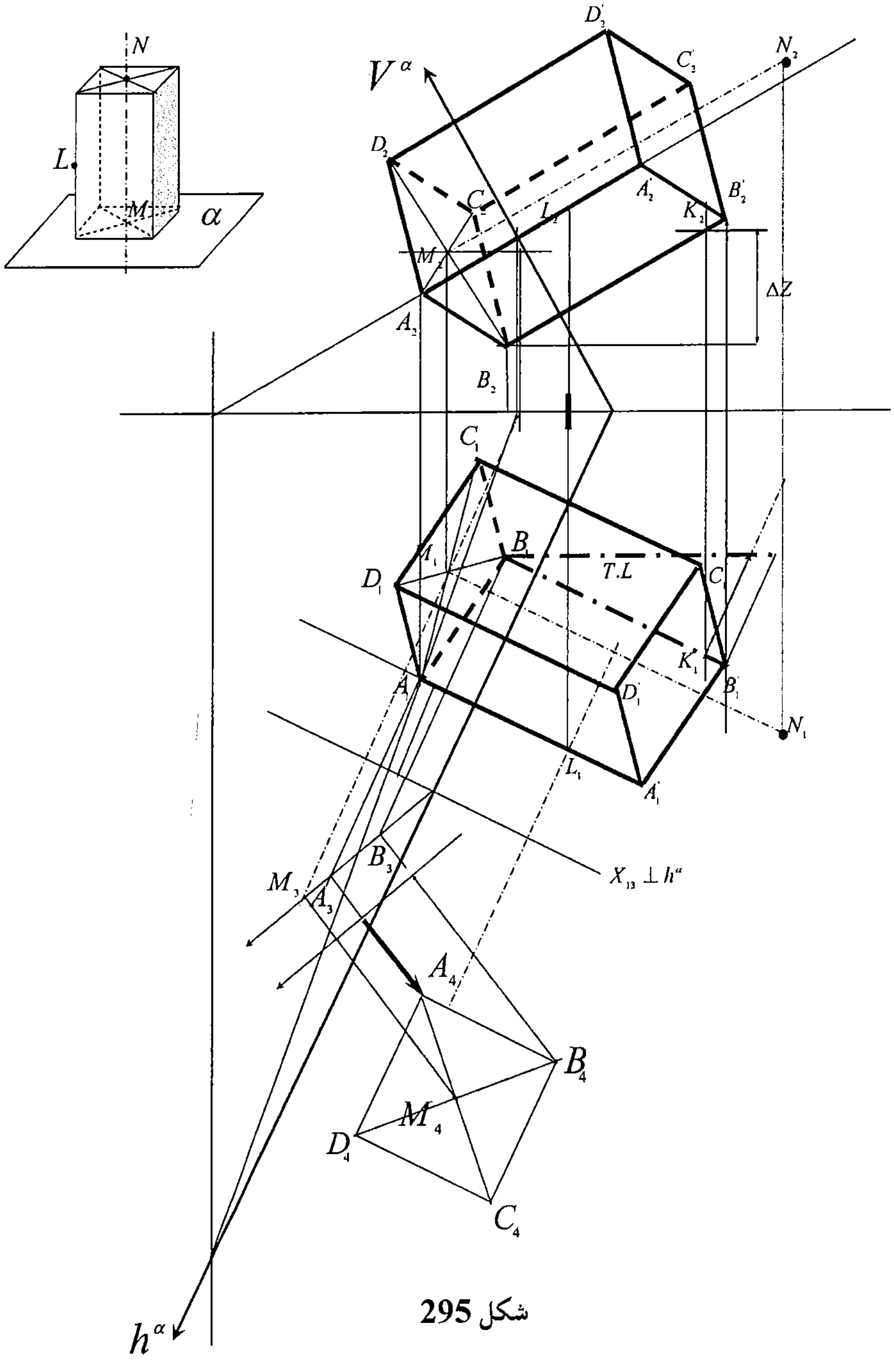
2. نختار أى نقطة على هذا العمودى مثل نقطة **K** وبالتالى نوجد الطول الحقيقى للمستقيم BK يكون هذا هو إتجاه الطول الحقيقى للحرف ومن هنا يمكن قياس الإرتفاع المطلوب عليه وليكن **7cm** إبتداء من نقطة **B** ونعود به فنحصل على مسقط النقطة فى المستوى الأفقى B_1' ثم نصعد بها لنأتى بمسقطها الرأسى B_2'، وبذلك أصبح لدينا طول

الحرف فى كل من المستوى الأفقى والرأسى. نقيم باقى الأعمده فى المستويين الأفقى والرأسى ونقيس عليها نفس الأطوال تبعا لمسقطها فنوجد القاعدة الأخرى.

تمارين عامه

مثل منشور رباعى قائم إرتفاعه 7 cm وقاعدته مربع إذا كان مركز إحدى قاعدتيه نقطة M (-3, 4,4) ومحوره يمر بالنقطة N(5.5, 8,8) وأحد أحرفه يمر بالنقطة L(0,8.5,5)

الحل:



شكل 295

1. نصل MN فيكون المحور للمنشور شكل 295

2. من نقطة M نرسم المستوى α العمودى على المحور فيكون مستوى القاعدة شكل 295

3. من نقطة L نرسم مستقيم موازى للمحور هو المستقيم a شكل 295

4. نقطة تقاطع المستقيم a مع

المستوى α هى **A** شكل **295**

5. أصبح لدينا نقطتان فى القاعدة وهما المركز وأحد رؤوس القاعدة وبالتالى نذهب للحصول على الشكل الحقيقى للمستوى لإيجاد الشكل الحقيقى للقاعدة ونعود لها بإستخدام الإسقاط المساعد. شكل **295**

6. يتم إقامة الأحرف من رؤوس القاعدة عموديه على الأثار وإيجاد الطول الحقيقى لأحد الأحرف وقياسه على الأخرين

7. إستكمال القاعدة الثانيه شكل **295**

مثل المنشور الرباعى $ABCDA'B'C'D'$ إذا علم الرأس $A(1,6,1)$ وإرتفاع المنشور 8 cm ومحوره يقع على المستقيم $e\ [E(-2, 6.5,8), K(4.5,1,0)]$.

الحل: **1**. يتم رسم من **A** مستوى عمودى على **e** يتقاطع معه فى مركز **M** مركز المنشور. شكل **296**

2.من A_1 و M_1 بالدوران نوجد (A), (M) وعليه نكمل المربع فى الدوران ثم نعود بــه بالتــألف فنوجــد $A_1B_1C_1D_1$. شكل **296**

3. بالإسقاط والمستقيمات الوجهيه اوالأفقيه نحصل على $A_2B_2C_2D_2$. شكل **296**

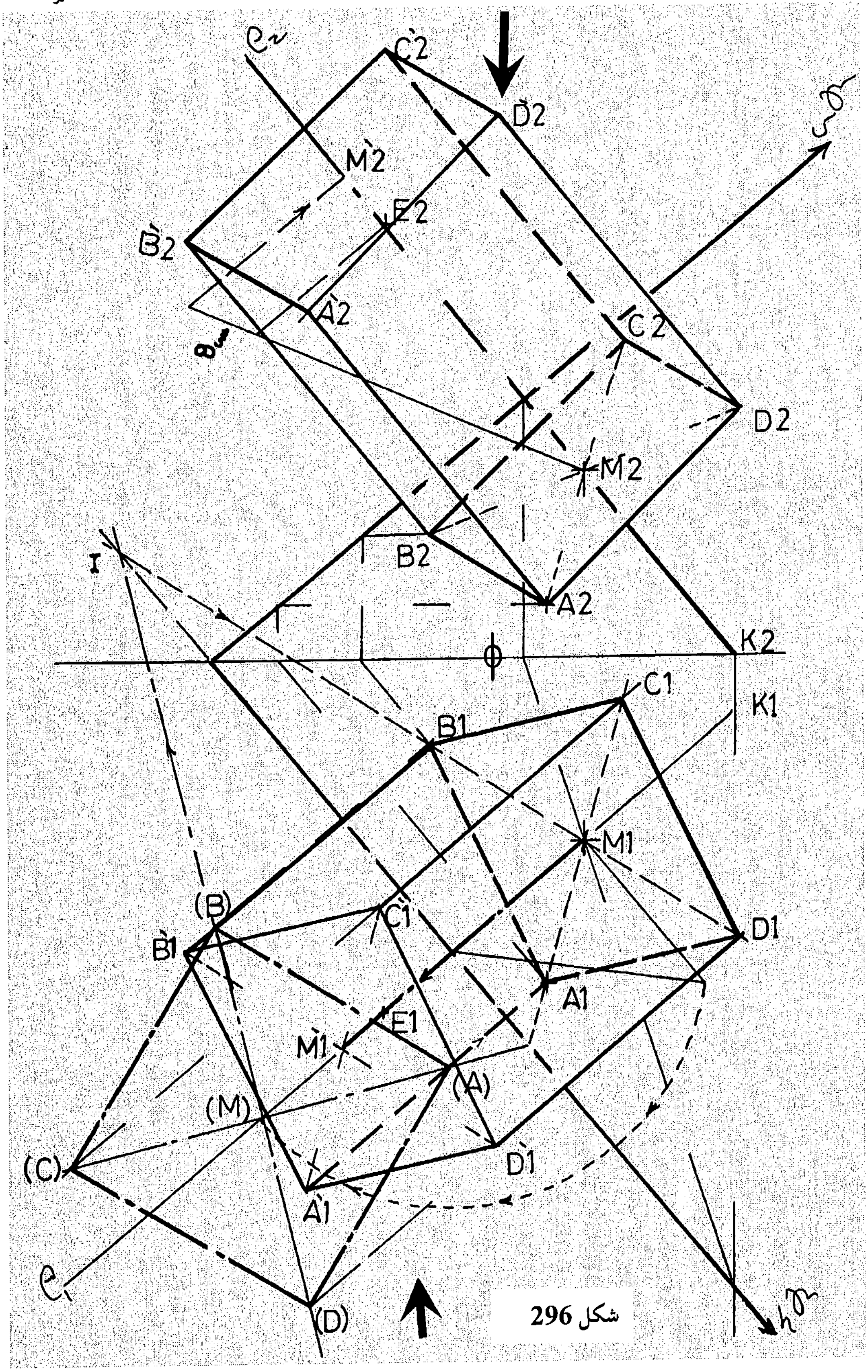
4. نرسم موازى للمسقط e_1 من $A_1B_1C_1D_1$ و نرسم موازى للمسقط e_2 من $A_2B_2C_2D_2$

5. نأخذ مثلا M_2E_2 ونأتى بالطول الحقيقى لهذا الإرتفاع ونوقع عليه البعد **8cm** ونعود به فنحصــل علــى M_2' وبالإسقاط على M_1' . شكل **296**

6. من الطول M_1M_1' نوقعه على كل الأحرف فى المسقط الأفقى فنحصل علــى $A_1'B_1'C_1'D_1'$. شــكل **296**

7. من الطول M_2M_2' نوقعه على كل الأحرف فى المسقط الرأسى فنحصل على $A_2'B_2'C_2'D_2'$. شــكل **296**

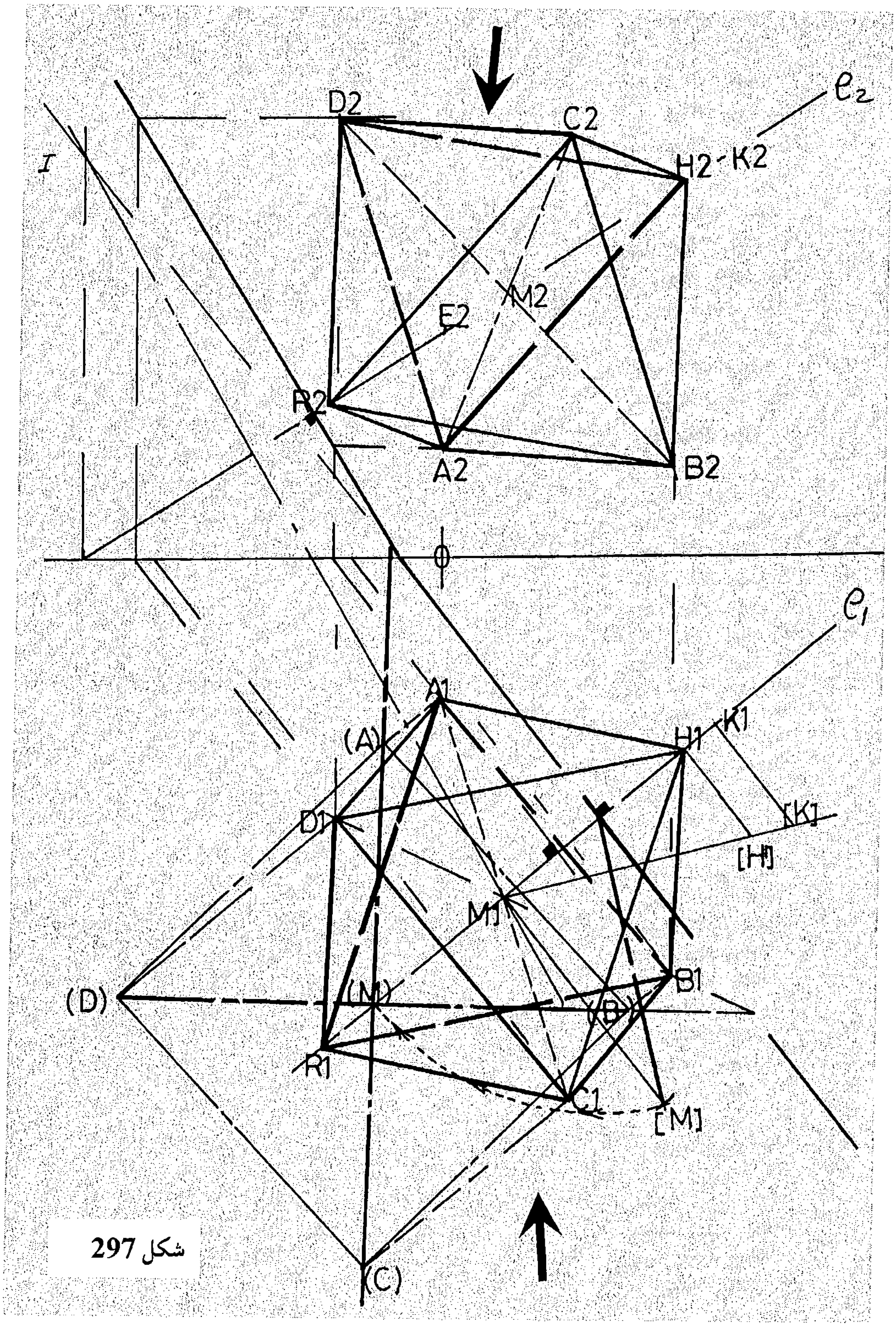
8. بالنسبه للظاهر والمختفى نجد أن فى المسقط الرأسى الحدود الخارجيه كلها ظاهرة ولايوجد سوى النقطة C_2 هى التى لايخرج منها حرف ظاهر كما أنها أقرب نقطة لخط الأرض فى المسقط الأفقى وبالتالى فالخارج منــها كله مختفى. وكذلك بالنسبه للمستوى الأفقى. شكل **296**


C2
D2
M2
E2
B2
A2
C2
D2
M2
B2
A2
K2
K1
C1
B1
M1
D1
A1
C1
B1
(B)
E1
M1
(A)
(M)
(C)
D1
A1
(D)

شكل 296

مثل ذو الثمانية أوجهه المنتظم الذى رأسه النقطة A(0,2.5,2) وقطره يقع على المستقيم e=EK حيث E(0,7,4), K(5,3,7)

الحل:



شكل 297

الحل:

1. يتم رسم من A مستوى عمودى على e بإستخدام مستقيم أفقى أو وجهى عمودى فيكــون مســتوى القاعدة

2. نوجد نقطة تقاطع المستوى العمودى مع المستقيم e فيكون المركز M . شكل 297

3. بالدوران حول الأثر الأفقى للمستوى العمودى نوجد كــل مــن (A),(M),(C),(D) وبــالرجوع بالتألف نأتى بـــ $A_1B_1C_1D_1$ وبالإسقاط المباشر نوجد $A_2B_2C_2D_2$. شكل 297

4. للحصول على رأس الثمانى نجد أن من مميزات الثمانى الأوجهه أن كــل الأقطــار متســاوية وبالتــالى بمعرفة(M) (A) يتم أخذ نقطة K_1 على المستقيم e ونأتى بطوله الحقيقــى ونوقــع عليــه الطــول (A)(M) نحصل على H_1 وننقل نفس الطول من M_1 نحصل علــى R_1 رؤوس الثمــانى. وكــذلك بالإسقاط فى المستوى الرأسى شكل 297 .

مثـل الهـرم الثلاثـى المنـتظم ABCD إذا علـم رأسـه A(3,7.5,2.5) والحـرف BC يقـع علـى المستقيم المعلوم e[E(7,0,9.5),K(-2.5,3.5,0)]

الحل: نكون مستوى القاعدة من النقطة A والمستقيم e لأنهما فى مستوى القاعدة وذلك برسم موازى من A للمستقيم KE فيتكون المستوى بمستقيمين متوازيين، نوجد أثار هذين المستقيمين ومنهما نحصل علــى أثــار المستوى الذى يحتويهم V^γ, h^γ. شكل 298

1. يتم دوران المستوى حول أثره الأفقى ونحصل على (e) ,(A). شكل 298

2. فى الدوران "هندسه مستوبيه" نستغل الخواص الهندسيه للمثلث ABC المتساوى الأضلاع "قاعدة الهرم" ، نسقط عمود على (EK) من (A) فنحصل على نقطة منتصف القاعدة ، ومن نقطة (A) نرســم مائــل 30^0 علــى العمودى فيقطع (EK) فى نقطة (B) ومنها نكون حصلنا على الطول (A)(B) فنقطع به نوجد (C) ويصــبح مثلث القاعدة بشكله الحقيقى واضح. شكل 298

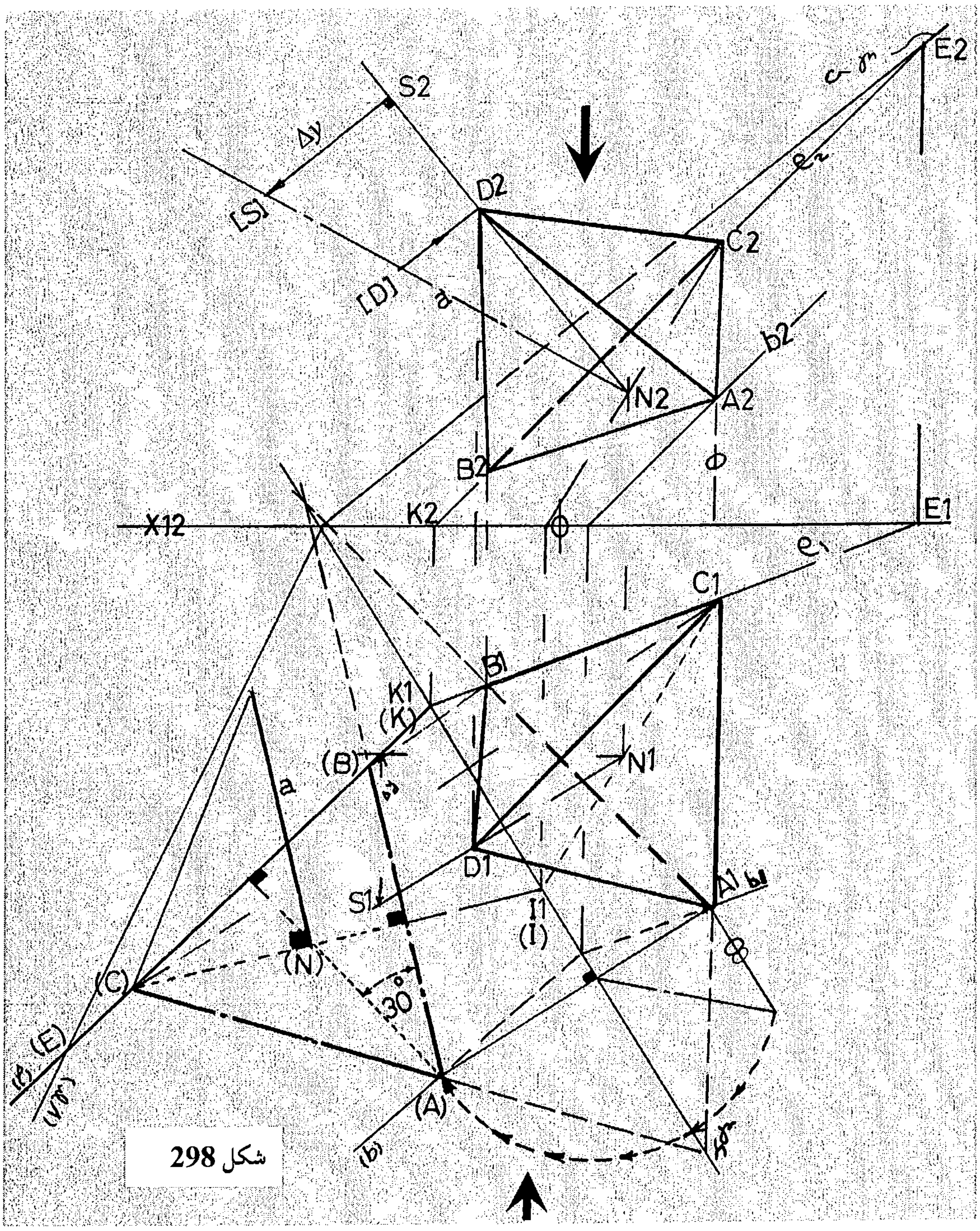
3. من نقطة تلاقى المستقيمات المتوسطه لقاعدة المثلث (A)(B)(C) وهى (N) نقيم عمودى هو إرتفاع الهرم الغير محدد

4. نركز فى أحد رؤوس القاعدة ونقطع الإرتفاع بالبرجل بطول ضلع الهرم فنحدد إرتفاع الهرم الحقيقــى كطــول حقيقى

5. نعود بكل من (A),(B),(C),(N) وذلــك بالتــألف فنحصـــل علـــى $A_1B_1C_1N_1$ ومـــن ثم علـــى $A_2B_2C_2N_2$

6. نرسم من N_1 وN_2 مستقيم عمودى على مستوى المثلث هو محل هندسى للإرتفاع ومنه نحدد الطول الحقيقى لـــه إبتداء من نقطة N ثم نقيس على الطول الحقيقى طول إرتفاع الهرم الذى أوجدناه ونحن فى الدوران فنوجد مساقط الرأس D_1,D_2 شكل **298**

7. الظاهر والمختفى: بنفس قاعدة الأحرف الظاهره الخارجيه أو أعلى نقطة فى المسقط الرأسى يكون كل الخـــارج منها ظاهر فى الأفقى والمقابل لها على نفس القطر منقط (مختفى) والعكس صحيح. شكل **298**


E2
S2
Δy
[S]
D2
C2
[D]
a
b2
N2
A2
B2
K2
X12
E1
C1
B1
K1
(K)
(B)
N1
D1
A1
S1
I1
(I)
(N)
(C)
30°
(E)
(A)
(b)

شكل 298

مثل المكعب الذى وجهه $A'B'C'D'$ يقع فى المستوى γ (-5,6,4) إذا علم أن $A'(-1,1.5,?)$ و $B'(0.5,?,1)$

1. نعين المسقط الرأسى A_2' للنقطة A وكذلك المسقط الأفقى B_1' للنقطة B وذلك بتمرير مستقيم أفقى أو وجهى

2. بدوران المستوى γ حول أثره الأفقى بإستخدام أى نقطة على الأثر الرأسى S_2 و S_1 على خط الأرض نحصل على (S) وهى نقطة على (V^γ) وهو دوران الأثر الرأسى، نصلها بنقطة تلاقى الأثار فيكون هذا هو (V^γ) ومن ثم نصنع خطوات دوران نقطة A_1' حول الأثر الأفقى فنحصل على (A') . شكل 299

3. نصل A_1',B_1' ونمده حتى يقابل محور الدوران h^γ فى النقطة I نصلها ب(A) ونسقط العمودى من B_1' فنحصل على (B') . شكل 299

4. من الضلع $(A')(B')$ يتم إنشاء المربع كامل بخواص الهندسه المستويه فيتكون $(C')(D')$ ونعود بهم نحصل على $C_1'D_1'$ بنظريه التألف شكل 299

5. بعد إستكمال رؤوس قاعدة المكعب "المربع" $A'B'C'D'$ نقيم أعمدة من رؤوس القاعدة على أثار المستوى فى مساقطها ونوجد الطول الحقيقى لأى حرف منهم وليكن القائم من A' كما هو واضح فى المسقط الرأسى ، ثم يتم تعين الطول الحقيقى لضلع المكعب عليه "الطول الحقيقى موجود فى الدوران". شكل 299

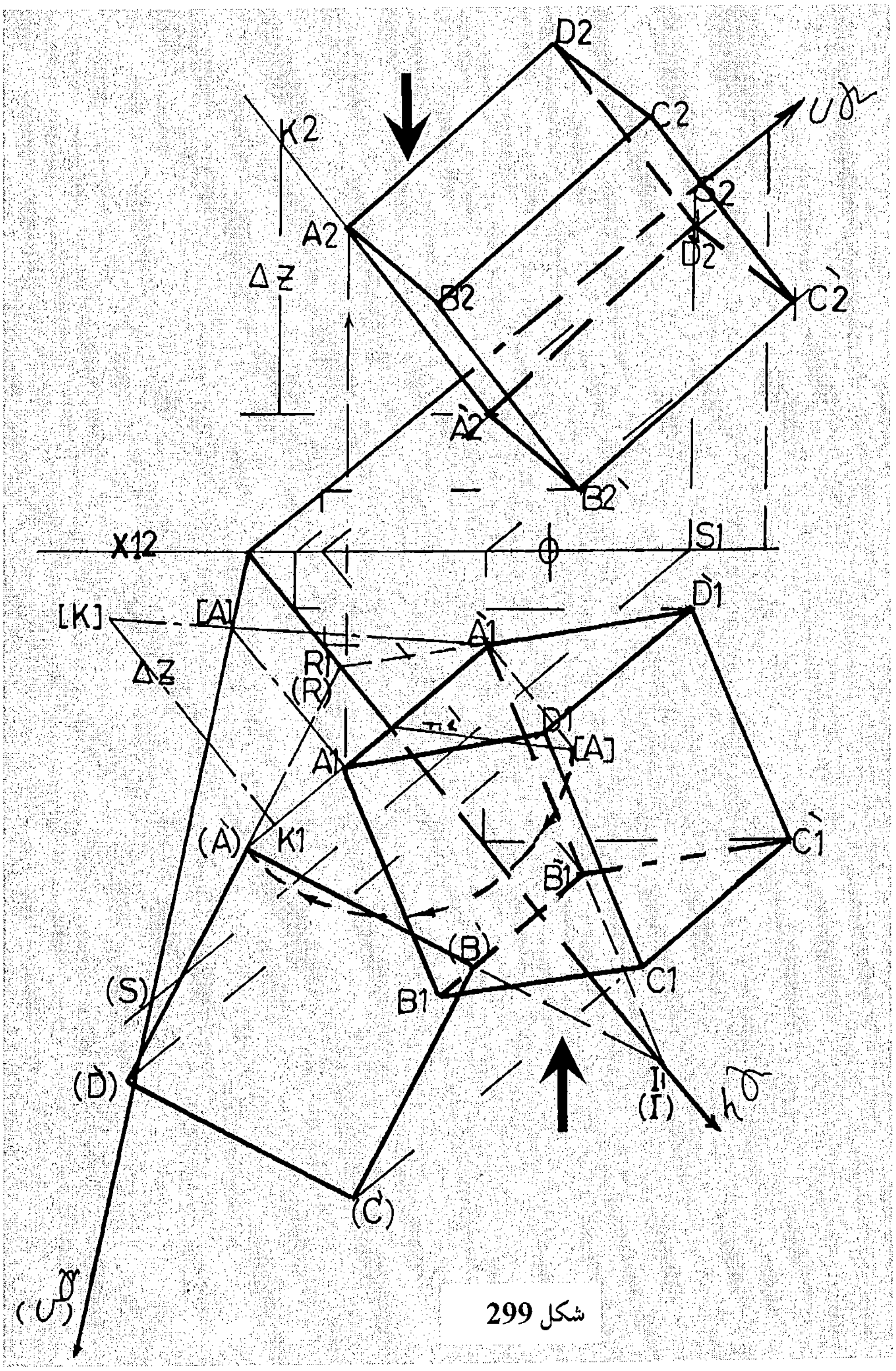
6. لتحديد الظاهر والمختفى فى المكعب فإنه يلزم تحديد رأسين فى المكعب على قطر وأحد بحيث أن ظهور أحدهما بكل الأحرف الخارجه منه يعنى إختفاء الأخر بكل الأحرف الخارجه منه وليتم ذلك يتم الاتى:

أولا: النظر على المسقط الرأسى من أعلى لأسفل فى إتجاه السهم، فنرى أول نقطة فى الأعلى هى الأولى وهى D_2 والتى يكون كل الخارج من المناظر لها فى الأفقى ظاهر أى من D_1 وتكون المقابله لها على القطر وهى B_1' كل الخارج منها منقط. شكل 299

ثانيا: النظر على المسقط الأفقى من أسفل لأعلى فى إتجاه السهم، فنرى أول نقطة فى الأسفل هى الأولى وهى B_1 والتى يكون كل الخارج من المناظر لها فى الرأسى ظاهر وهى B_2 وتكون المقابله لها على القطر وهى D_2' كل الخارج منها منقط.

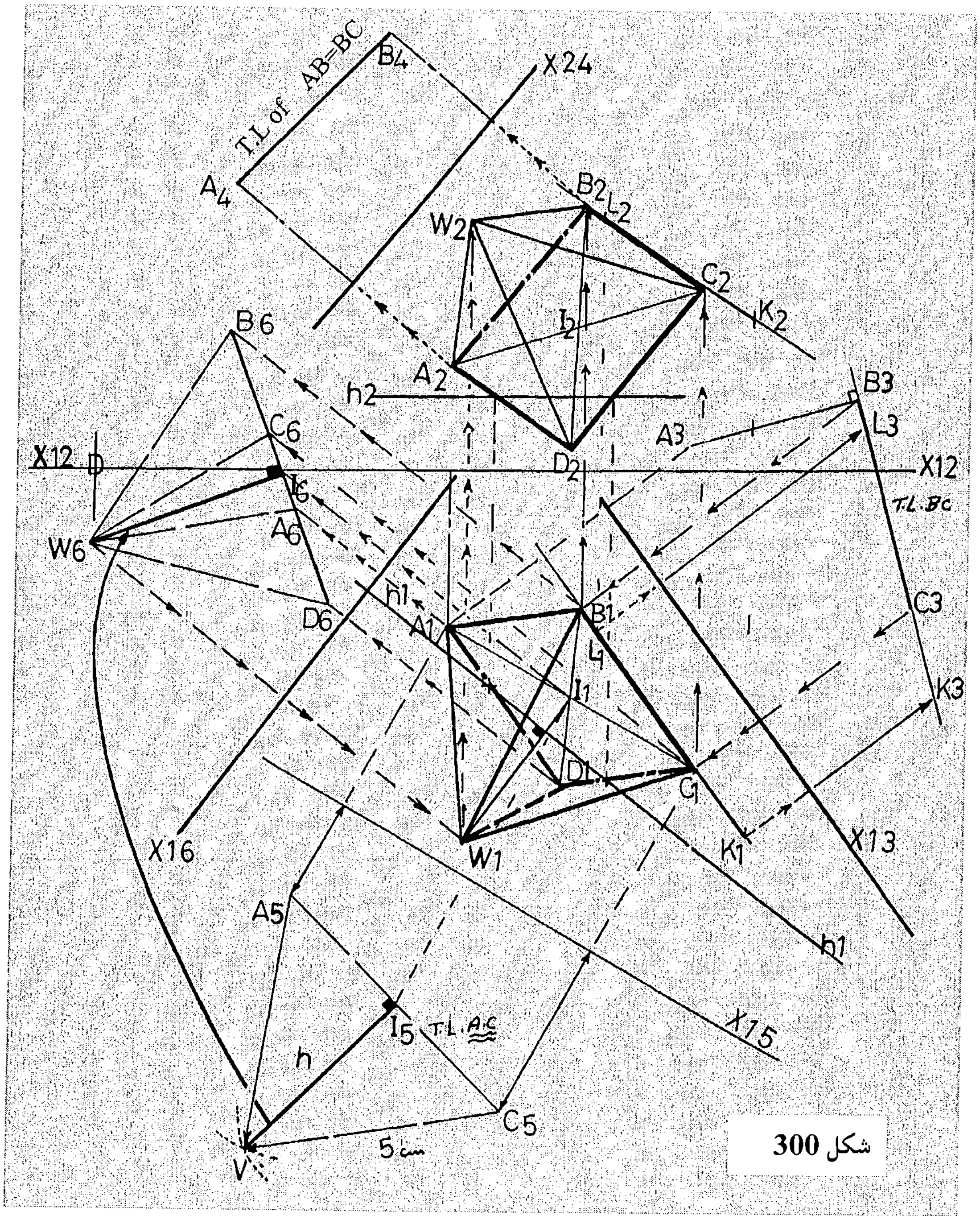
ثالثا: يمكن عكس القاعدة فعند النظر من أسفل لأعلى ننظر لأقرب نقطة من خط الأرض فنجدها هى D_1' فتكون فى الرأسى كل الخارج منها منقط والباقى ظاهر . وعند النظر على المسقط الرأسى من أعلى لأسفل نجد أقرب نقطة لخط الأرض

هى B_2' وبالتالى الخارج من المناظر لها فى الأفقى وهى B_1' منقط والباقى ظاهر. وهذه القاعدة للمنشور والمكعب الرباعى.



شكل 299

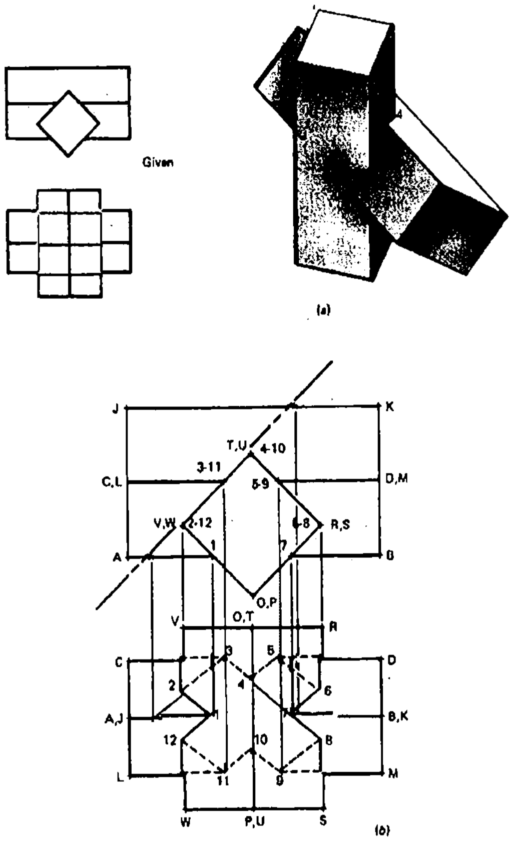
مثل مربع ABCD حيث A(7,3,2) رأس فيه وأحد أضلاعه يقع على المســـتقيم b[L(10,3,5), K(13,7,3)] ثم مثل هرم قائم قاعدته هذا المربع وطول حرفه 5cm .



شكل 300

مضلع تقاطع مستوى مع كثيرات السطوح

مضلع التقاطع لمستوى مع كثيرة السطوح هو شكل هندسى مضلع، أضلاعه خطوط ناتجة من تقاطع المستوى القاطع مع مستويات أوجهه كثيرة السطوح، رؤوس هذا المضلع هى نقاط تقاطع المستوى القاطع مع أحرف كثيرة السطوح كما بالشكل **301**. وعدد أضلاع مضلع التقـــاطع هى عدد أوجهه كثيره السطوح المقطوعة. يتم تعيين مضلع التقاطع بعد إعتبار أحرف كـــثيره السطوح مستقيمات ونأتى بنقطة تقـــاطع كـــل مستقيم مع المستوى وبالتالى تتواجد عدد نقاط بعدد الأحرف ويتم توصيلها معا.



شكل 301

ويتم <u>إيجاد نقاط تقاطع الأحرف مع المستوى</u> القاطع بأحد الاساليب الأتية:

1. بالطريقه العامه "نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى" والحالة الخاصة منها عندما يكون المستوى خطى المسقط
2. بإستخدام الإسقاط المساعد "بتحويل المستوى لخطى المسقط ومعه كثيره السطوح فتنتج مساقط نقاط مضلع التقاطع مع المستوى الخطى ولكن فى الثلاثات (كلها تحمل رقم 3) وبالتالى نعود بها لمساقطها الأولى والثانيه
3. بإستخدام التألف الموجود بين مضلع التقاطع وقاعدة الجسم

وسيتم شرحها كلها على أمثلة نطبيقية قادمة

إيجاد مضلع التقاطع بإستخدام المستوى العمودى خطى المسقط

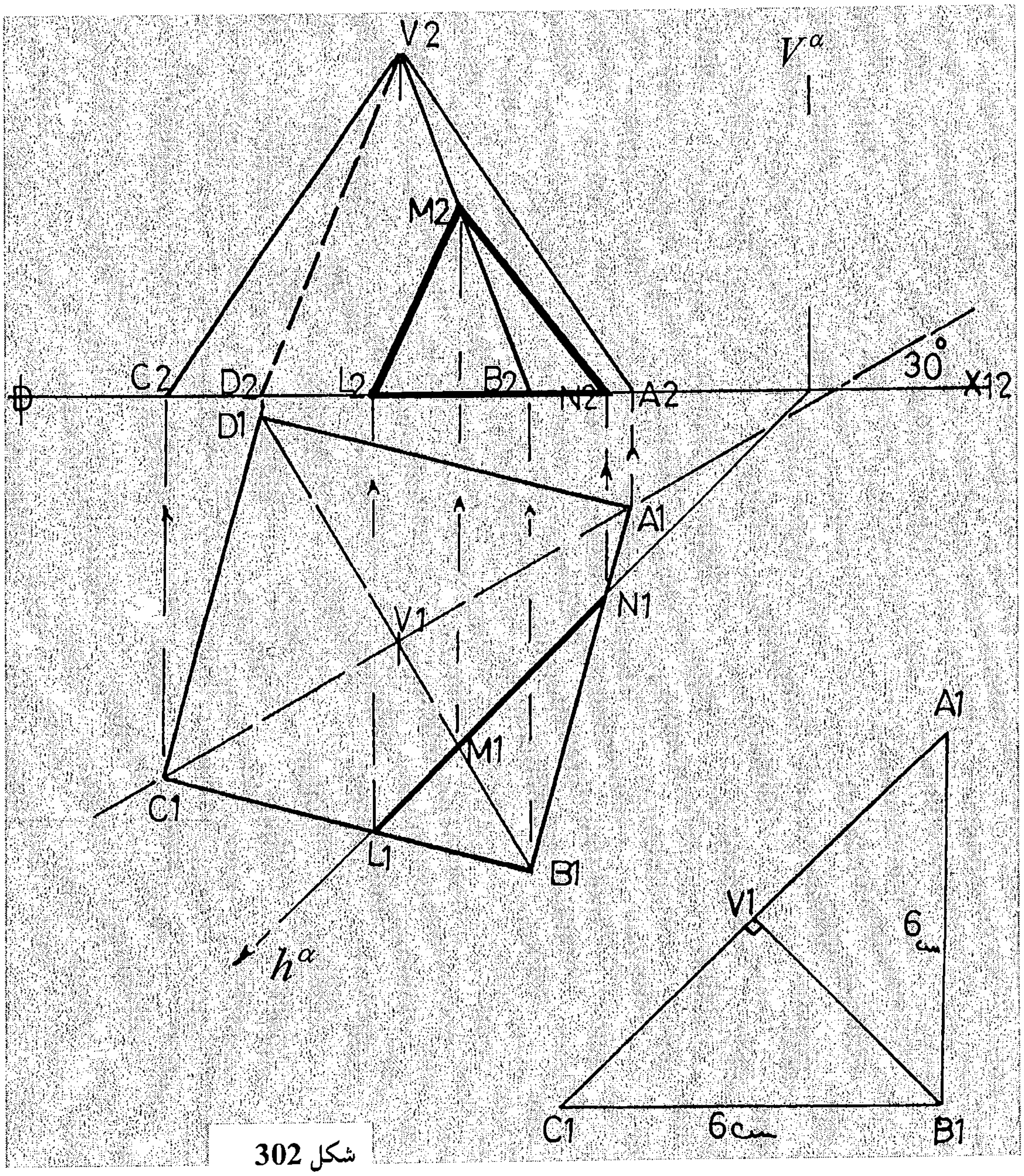
مثل مضلع تقاطع هرم قائم رأسه V(6,4,5.5) وقاعدته مربع يقع فى π_1 طول ضلعه 5cm وأحد قطريه يميل 30^0 على X_{12} مع المستوى أولا: رأسى $\alpha(12.5,45^0)$ ثانيا: عمودى على π_2 وهو $\alpha(0,30^0)$

الحل: أولا رأسى $\alpha(12.5,45^0)$

1. نتيجة لأن القاعدة فى المستوى الأفقى فتظهر بشكلها الحقيقى، ولرسم القاعدة يتم رسم مستقيم فى الأفقى يميل 30^0 على خط الأرض من V_1 " محل هندسى لقطر القاعدة AC". شكل 302
2. إستخدام رسم خارجى لمربع طول ضلعه 6cm نأتى بطول القطر ونصفه فتنتج M وهى V_1
3. يتم توقيع طول نصف القطر من V_1 فنحصل على C_1A_1 ثم نقيم عمودى من V_1 محل هندسى لقطر المربع الأخر ونقيس عليه نفس نصف القطر فيكتمل المربع وهو قاعدتة الهرم، ونصله بالرأس فيكتمل الهرم
4. نوقع المستوى α القاطع وهو مستوى رأسى خطى المسقط الأفقى ، أى يقطع الهرم فى مضلع تقاطع ولكنه يظهر خط فى المستوى الأفقى نتيجه لخاصية المستوى الرأسى الذى يقع فيه مضلع التقاطع . شكل 302
5. من شكل 302 ، نجد أن المستوى الرأسى قطع الهرم فى المستوى الأفقى فى النقاط الاتيه: $L_1M_1N_1$ ، حيث L_1 على ضلع القاعدة C_1B_1 ، و M_1 على الحرف V_1B_1 ، و N_1 على الضلع A_1B_1 ، لذلك نوجد مساقطها الرأسية على المستقيمات التى تقع عليها حيث L_2,M_2 يقعا على خط الأرض لأنهما على أضلاع القاعدة التى تقع فى المستوى الأفقى أما M_2 فتقع غلى الحرف فتنقل على V_2B_2 لأن مسقطها الأفقى يقع على V_1B_1 وبالتالى نكون حصلنا على مضلع تقاطع المستوى الرأسى مع الهرم.
6. من شكل 302، عندما ننظر من أسفل لأعلى على المسقط الأفقى نجد أن أضلاع القاعدة للهرم منها ماهو ظاهر ومنها ماهو مختفى، وكذلك رؤوس القاعدة. فإذا نظرنا سنجد رؤوس القاعدة $C_1B_1A_1$

لايعوق رؤيتهم شيء أما النقطة D_1 فإنها تكون خلف حدود المسافة من C_1 إلى A_1 وهذا يعني أنها لاتظهر فى الرأسى هى والحرف الخارج منها، لذلك فإن الحرف V_2D_2 سيكون مختفى رأسيا.

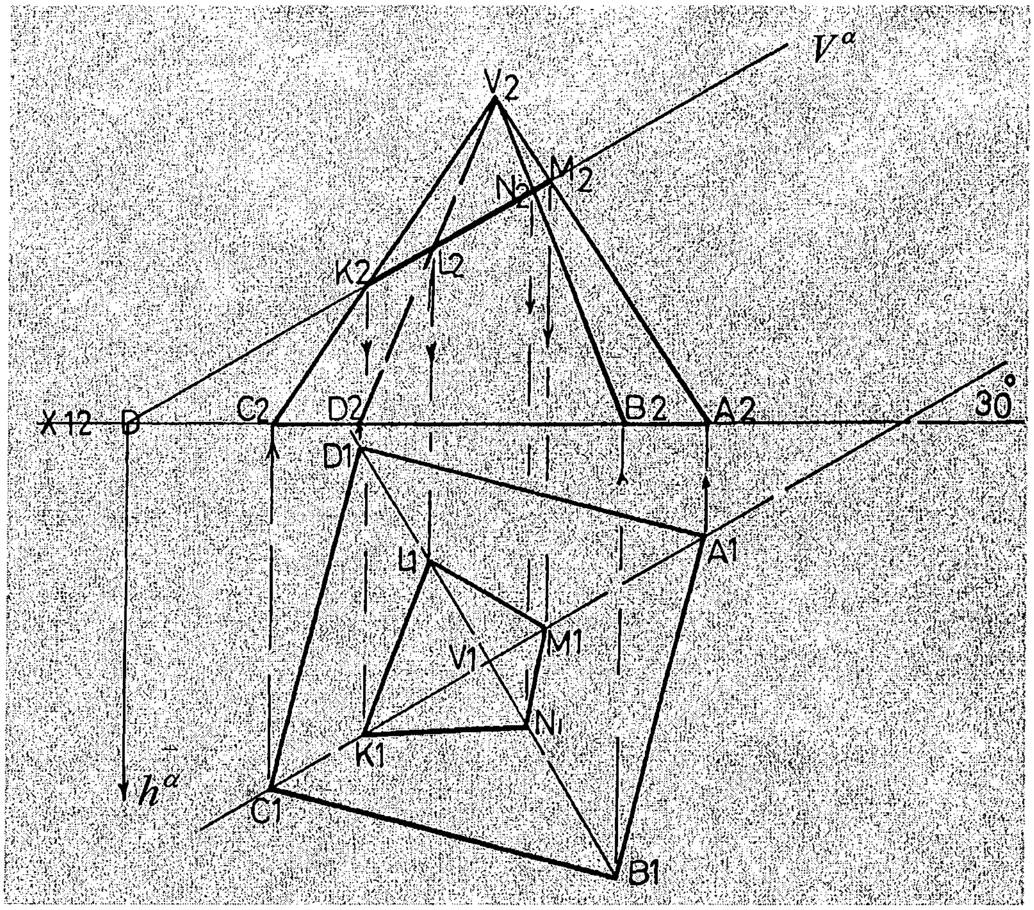
7. بالنسبة لمضلع التقاطع فبنفس الإسلوب السابق للنظر نجده كله ظاهر أمام الناظر لذلك فهو ظاهر فى المسقط الرأسى. شكل 302



شكل 302

ثانيا: عمودى على π_2 وهو $\alpha(0,30^0)$

بالنسبه للحاله الثانية يكون العكس فى إتجاه النظر والتطبيق كما يتضح فى الشكل **303**



شكل **303**

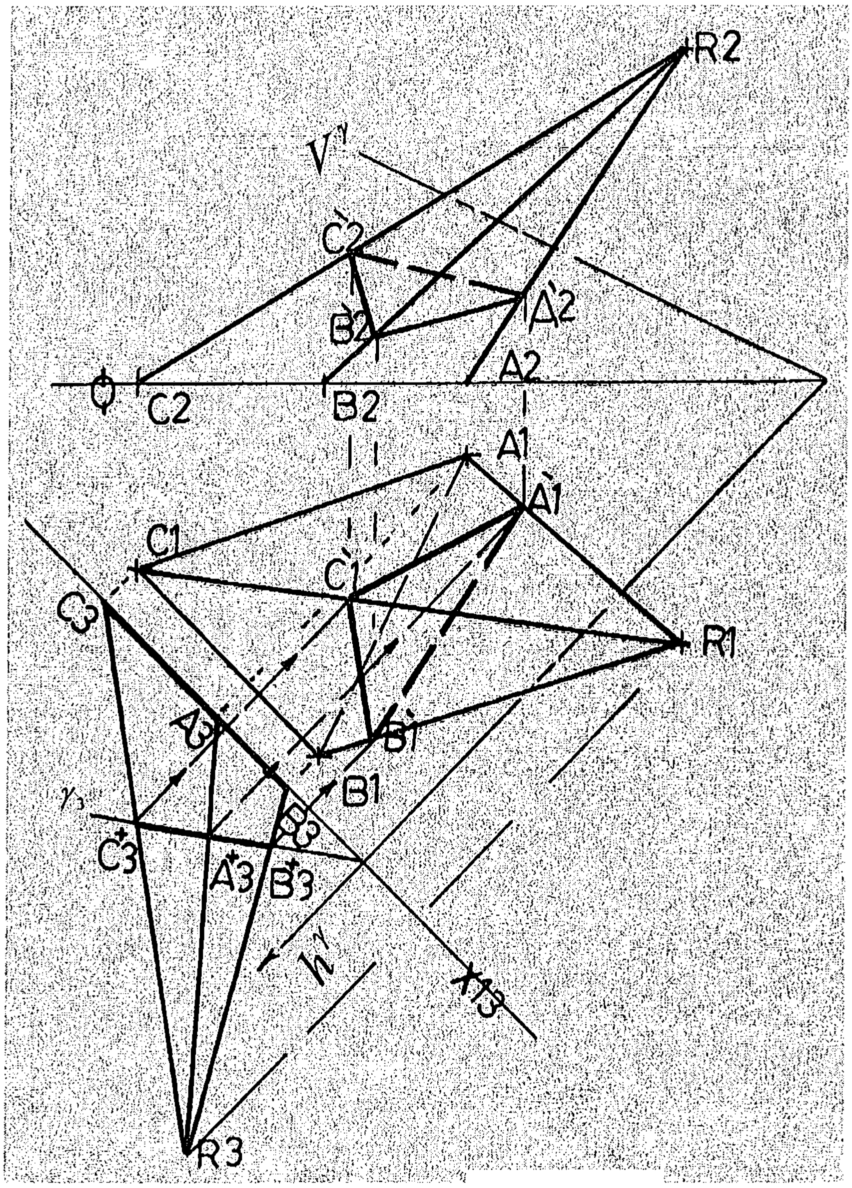
<u>إيجاد مضلع التقاطع بإستخدام الإسقاط المساعد</u>

معلوم هرم ثلاثى مائل قاعدته ABC ورأسه R والمستوى γ حيث $(10,45^0, 25^0)$، γ R(8,3.5,4.5), A(5,1,0),B(3,5,0),C(0.5,2.5,0) ، أوجد مضلع التقاطع بإستخدام الإسقاط المساعد للهرم الثلاثى

الحل: يتم تحويل المستوى القاطع الى مستوى خطى المسقط بإستخدام الإسقاط المساعد ، بإستخدام X_{13} عمودى على h^γ فنحصل على γ_3 وأيضا يتم تحويل الهرم الى المسقط الثالث "الثلاثات" شكل **304**

1. مميزات إيجاد المسقط الثالث أن المستوى خطي المسقط ومن مميزات خطي المسقط أن نقطة تقاطعه مع أي مستقيم تظهر مباشرة على خطي المسقط كما وضحنا في الموضع سابقا في بند نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى خطي المسقط شكل 304

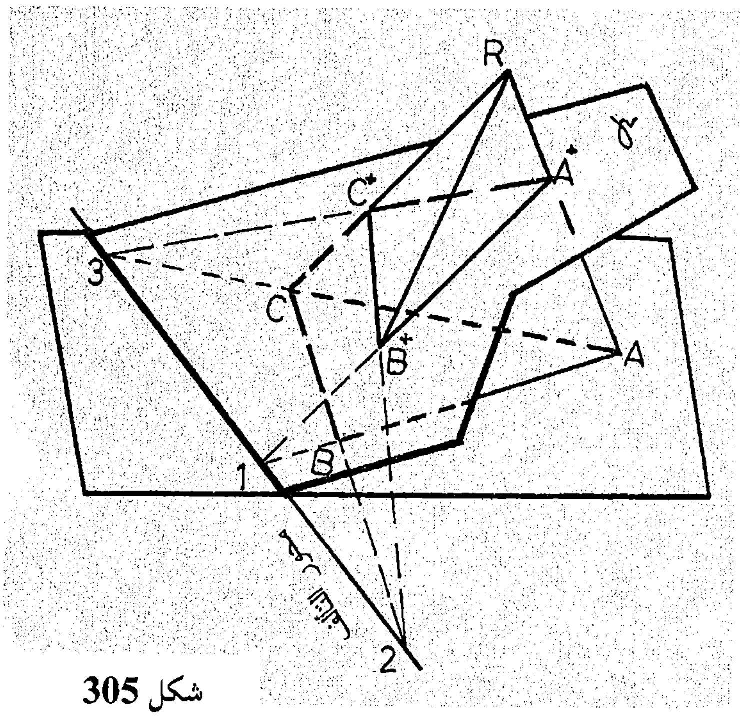
2. في π_3 نحصل على A_3^* B_3^* C_3^* وهي نقاط تقع على مساقط الأحرف ولكن أيضا في الثلاثات أي تقع على



شكل 304

الأحرف R_3A_3, R_3B_3, R_3C_3 وبالتالي نعود بمساقط نقاط التقاطع على الأحرف المناظره لها في المسقط الأول الأفقي فنحصل على A_1',B_1', C_1' المسقط الثاني الرأسي فنحصل على A_2', B_{21}', C_2' وبذلك يتحدد مساقط مضلع التقاطع.

تعين مضلع التقاطع بالتألف المركزى



شكل 305

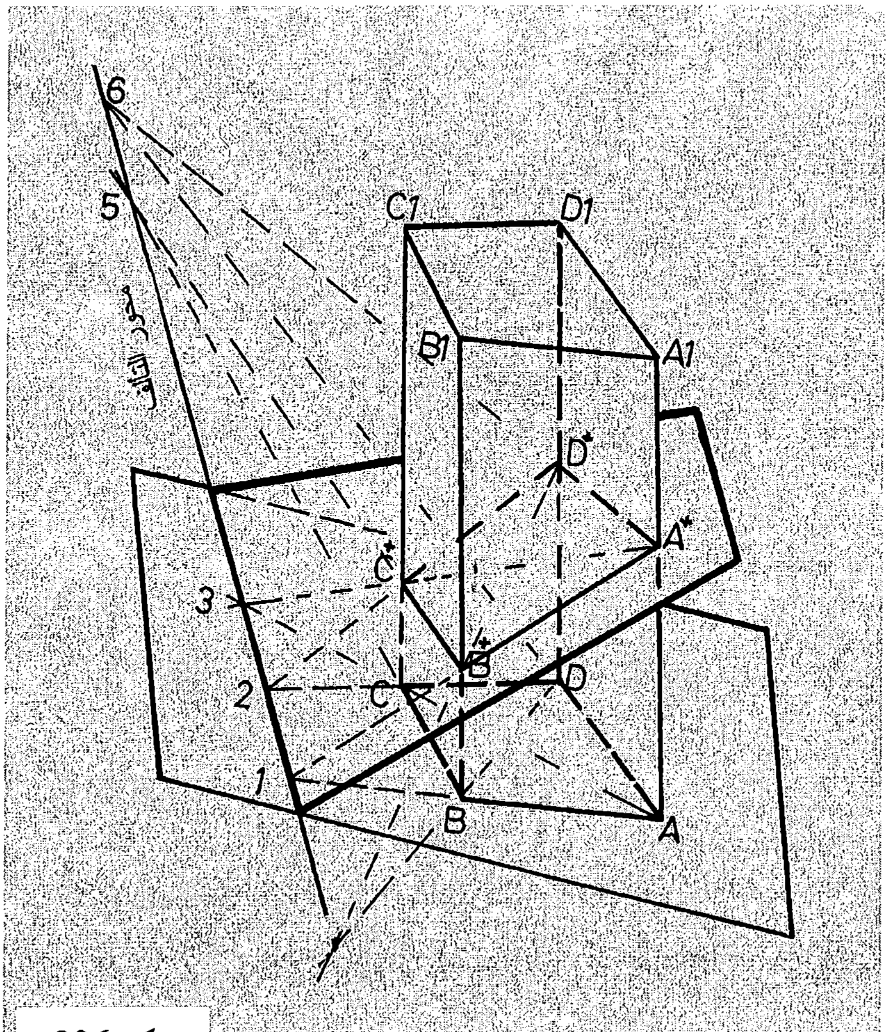
إذا قطع مستوى مثل γ أحــد كثيرات السطوح فإنه يقطعه فى مضلع مســتوى C^*, A^*,B^* كما بالشكل 305 حيث تتواجد علاقة بــين مضـــلع التقـــاطع $A^*B^*C^*$ ومضـــلع القاعـــدة ABC وتســـمى بالتـــألف وخواصها كالأتى:

1. لكل نقطة على مضـــلع التقـــاطع تناظرها نقطة واحدة على مضـــلع القاعدة على نفس الحرف والعكس صحيح ، أى أن علاقة التناظر واحد لواحد بين مضلع التقاطع ومضلع القاعدة. كمثال شكل 305 النقاط A^* B^* C^* تناظر A, B' C والعكس صحيح وكذلك شكل 306 النقاط A^* D^* B^* C^* تناظر A, B' C, D.
2. خط تقاطع المستوى القاطع γ ومستوى القاعدة يسمى محور التألف
3. أى ضلع من أضلاع المضلع يناظره ضلع من أضلاع القاعدة ، كمثال شكل 305 لضلع A^* B^* يناظر الضلع A B والضلع B^* C^* يناظر الضلع B C والعكس صحيح، وكذلك شكل 306 لجميع الأضلاع
4. كل مستقيمين متناظرين (كمثال A^*B^*و AB) يتقابلان في نقطة واحدة على محور التألف. كمثال شكل 305 و 306، A^*B^* عند إمتداده يقطع محور التألف فى نقطة رقم 1 هى نفس النقطة التى يتقاطع فيها الخط الواصل بين النقطتين المناظرين لهم فى القاعدة وهما AB مع محور الـــتألف. وكذلك لباقى المستقيمات فى شكل 305 C^*B^*، CB و A^*C^*، AC

في شـكل 306 A^*B^*، AB و C^*B^*، CB و C^*D^*، CD و A^*D^*، AD و B^*D^*، BD و A^*C^* ، AC

5. المستقيمات الواصلة بين كل نقطتين متناظرتين تقع على حرف واحد تتقابل كلها في نقطة واحدة كمثال 1و2و3و4و5و6 شكل 306 وهي تشكل رأس وجهه هرم وهذا النوع يسمى التألف المركزي .

6. المستقيمات الواصلة بين كل نقطتين متناظرتين تتوازى وتوازى أحرف النشور وهذا النوع يسمى بالتألف المتوازي .



شكل 306

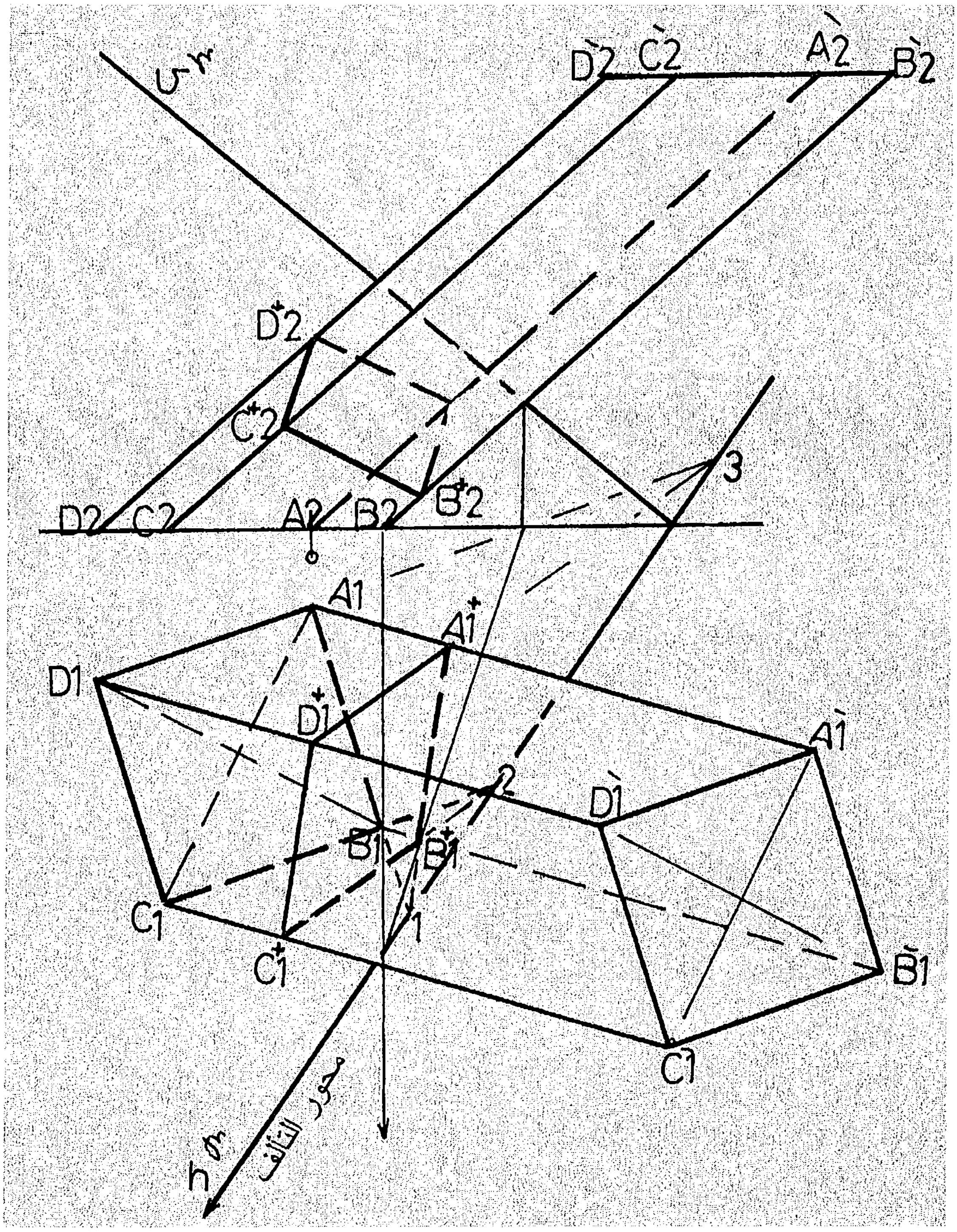
من المثالين السابقين يتضح أنه بتواجد مضلع القاعدة ومحور التألف ونقطة واحدة على مضلع التقاطع يمكن إستخدام التألف وإستنتاج نقاط مضلع التقاطع الباقية

مثل منشور رباعى مائل قاعدته مربع ABCD واقعه فى المستوى الأفقى حيث A(0,1,?), D(-3,2,?) وأحد رؤوس القاعدة العليا A'(7,3,6) ثم عين مضلع التقاطع مع المنشور مع المستوى γ (5,7,4).

الحل:

1. نجد أولا فى شكل 307 قاعدة المنشور تقع فى المستوى الأفقى (T.S) ويتم إستكمال الشكل المربع فى المسقط الأفقى بإستخدام خواص الهندسه المستويه إبتداء من A_1D_1
2. من النقطة A' نرسم الحرف AA' وبذلك يتحدد إتجاه مساقط الحرف وطولها ، نرسم موازيات من رؤوس القاعدة ونستكمل القاعدة العليا شكل 307
3. لنأتى بتقاطع المنشور مع المستوى γ نأخذ الحرف B_2B_2' ونوجد نقطة تقاطعه مع المستوى γ بتمرير مستوى رأسى بالحرف فنوجد نقطة التقاطع وهى B_1^* شكل 307
4. محور التألف هو خط تقاطع مستوى القاعدة مع المستوى γ وهو h^γ شكل 307
5. بعد الحصول على B_1^* كنقطة فى المضلع نبدأ فى الحصول على باقى نقاط المضلع وذلك بالحصول أولا على النقاط المرتبطه بها كالأتى:

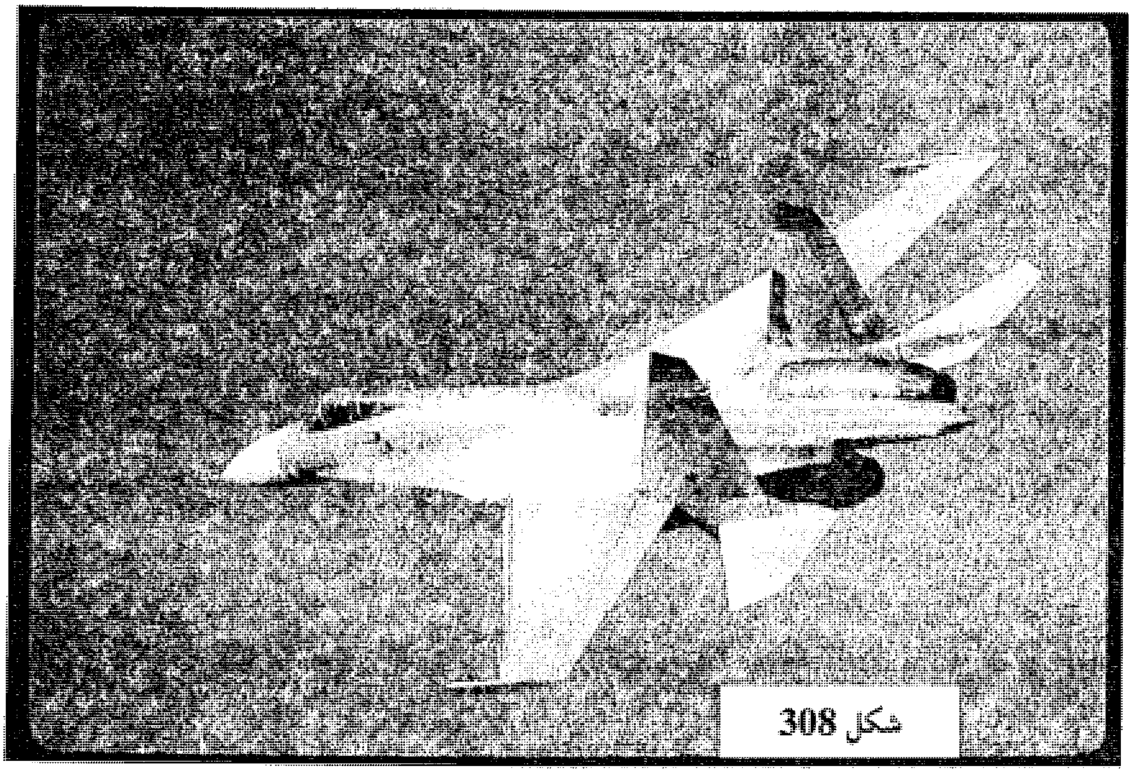
- نصل A_1B_1 ونمده حتى يقطع محور التألف فى نقطة 1 نصلها بالنقطة B_1^* فيقطع الحرف A_1A_1' فى نقطة هى A_1^* على مضلع التقاطع شكل 307
- كذلك C_1B_1 نمده فيقطع محور التألف فى نقطة 2 نصلها بنقطة B_1^* ونمده يقطع الحرف C_1C_1'فى نقطة C_1^* شكل 307
- نصل D_1A_1 ونمده يقطع محور التألف فى نقطة 3 نصلها بنقطة A_1^* ونمده يقطع الحرفD_1D_1' فى نقطة D_1^* شكل 307
- وبالتالى يصبح لدينا شكل مضلع التقاطع ومساقطه كاملة
- بالنسبه للظاهر والمختفى يتم كما إتبعنا فى التمارين السابقة وعامة أضلاع مضلع التقاطع المنطلقة من أحد الأحرف المنقطة (المختفية) تكون مختفية. شكل 307


D̀2
C̀2
À2
B̀2
D⁺2
C⁺2
B⁺2
D2
C2
A2
B2
3
A1
A⁺1
D1
D⁺1
À1
D̀1
2
B1
B⁺1
C1
C⁺1
1
B̀1
C̀1
محور التآلف
h

شكل 307

الإفراد

إفراد السطوح تعتبر من الموضوعات الهامه فى الحياة العملية وهى تلخص ماسعينا لتعلمه من بداية هذا العلم. والأمثلة كثيرة على ذلك، لأننا عندما نصمم جسما فإن هذا الجسم له أبعاده الخارجية وأشكاله وكذلك كثيرات السطوح والسطوح الدورانية كما فى شكل 308 فى الجزء الأمامى من الطائرة وكيفية أنه يتكون من أكثر من جزء منحنى وكيف سيكون شكل ألواح المعدن قبل التصنيع وماهى مساحته التى يجب تقطيعه عليها حتى يمكن عند تشكيلها تكون هذا الشكل. وكمثال أخر فى مداخن المصانع هى إسطوانات متقاطعة وهى كانت فى الأصل قبل التصنيع ألواح من الصاج لذلك كانت الخطوة الأولى بعد التصميم هى معرفة مساحة الألواح الصاج التى سيتم قطعها مفرودة ومسطحة بحيث يكون شكلها عند التصنيع والتطبيق تعطى الشكل الذى تم تصميمه. وقِس على ذلك كل الأشكال التى تُصمم من أجسام الأجهزة والمعدات وعبوات التعبئة والعلب الكرتون التى توضع بها البضائع. ومن هنا ظهر أهمية هذه الجزء من العلم والتى يجب على المهندس تعلمه جيدا. حيث وجب على طالب كلية الهندسة أن يجيد هذا العلم. وإننى شخصيا أُرجع التأخر فى عملية التصنيع فى الدول النامية إلى أن المهندسين لايجيدوا هذا العلم ويتركوه للفنيين (الصنايعية) للعمل فيه بالشبهه أو بالقياس.


شكل 308

إفراد السطح الجانبى والقاعدة ومضلع التقاطع للهرم والمنشور

لإفراد السطح الجانبى للهرم أو المنشور وكذلك القاعدة لابد من معرفة الأطوال الحقيقية لأحرف الهرم أو المنشور بوضعه من ناحية أنه قائم أو مائل وكذلك الأطوال الحقيقية لأضلاع القاعدة ومعه أيضا مضلع التقاطع إن وجد.

بالنسبة للأحرف: يتم تعين الأطوال الحقيقة للأحرف بواسطة الدوران أو الإسقاط المساعد. فالنسبة للهرم يتم إستخدام الدوران لأنه أسهل فى التناول والمعالجة، ويتم دوران نهايات الأحرف (نقاط رؤوس القاعدة) إبتداء من رأس الهرم بحيث تكون فى المسقط الأفقى فى الوضع الذى يشبه مسقط المستقيم الوجهى (موازية لخط الأرض) (كما حدث فى باب القياس) ومن ثم بالتناظر الرأسى على خط الأرض نوجد المساقط الرأسية لهذه النقاط نهايات الأحرف (نقاط رؤوس القاعدة)، وسنعرض بعض الأمثلة على ذلك . أما بالنسبة للمنشور فإستخدام الإسقاط المساعد هو أفضل الطرق لنأتى بالطول الحقيقى للأحرف المتوازية حيث نرسم خط أرض X_{13} يوازى أى حرف فنأتى بالطول الحقيقى للحرف ومايوازيه من أحرف أخرى وكذلك الوضع الحقيقى للمنشور ناحية أنه قائم أو مائل، وسنعرض بعض الأمثلة على ذلك.

وفى أول باب الدوران سنجد مثال كامل على كيفية إستغلال الدوران لنأتى بالأطوال الحقيقية للأحرف للهرم وكذلك الأطوال بداية من رأس الهرم وحتى نقاط مضلع التقاطع.

بالنسبة للقاعدة

يتم إستخدام الدوران للمستوى حول الأثر الأفقى للقاعدة حيث نحصل على الشكل الحقيقى للقاعدة وكذلك الأطوال الحقيقية لأضلاعها لأننا سنستخدمها بأطوالها الحقيقة.

بالنسبة لمضلع التقاطع

يتم إستخدام الدوران للمستوى حول الأثر الأفقىللمستوى الذى قطع كثيرة السطوح وهو المستوى الذى يقع فيه مضلع التقاطع حيث نحصل على الشكل الحقيقى لمضلع التقاطع وكذلك الأطوال الحقيقية لأضلاعه لأننا سنستخدمها بأطوالها الحقيقة.

مثل هرم رباعى مائل RABCD ومثل تقاطعه مع المستوى γ $(2.5,55^0,155^0)$ ومثل إفراد السطح والقاعدة وكذلك مضلع التقاطع على سطح الإفراد حيث R(0,4.5,5.5), A(-8,5.5,0), B(-3.5,6.5,0), C(2.5,0.5,0), D(-6,1.5,0)

الحل

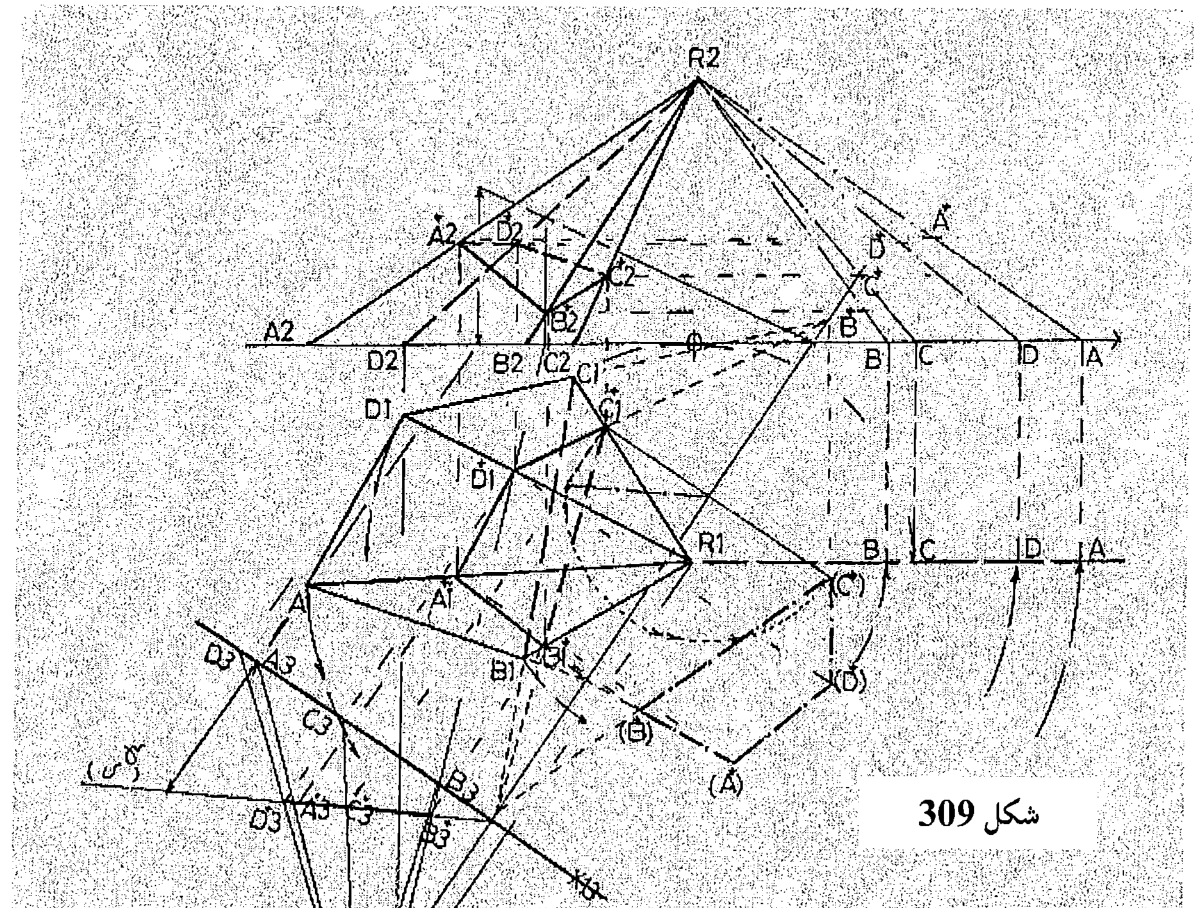
1. من شكل **309** ومن خواص نقاط القاعدة فإنها تقع فى المستوى الأفقى ولايوجد نقص فى الإحداثيات أى يتم التمثيل المباشر للهرم والمستوى القاطع
2. بإستخدام الإسقاط المساعد وتحويل المستوى γ لخطى المسقط نأتى بمضلع التقاطع $^+A_3{}^+B_3{}^+C_3{}^+D_3$ والعوده بهم لمساقطهم الأولى والثانيه
3. لإحداث الإفراد لابد وأن نأتى بالأطوال الحقيقية لجميع الأضلاع فى الهرم حتى يمكن إفرادها بنفس علاقات الأضلاع وبعدها الحقيقىعن بعضها ولكن بالأطوال الحقيقيه وليتم ذلك نتبع الاتى:

- بالنسبة للقاعدة فهى بشكلها الحقيقى فى المستوى الأفقى
- بالنسبة لمضلع التقاطع نأتى بشكله الحقيقى بإستخدام الدوران حول الأثر الأفقى للمستوى الواقع فيه وهو المستوى γ فنحصل على (D^+) (C^+) (B^+) (A^+) وتصبح هذه هى الأطوال الحقيقيه والشكل الحقيقى لمضلع التقاطع
- بالنسبه للأحرف الخاصة بالهرم والأحرف الخاصه بمضلع التقاطع (من رأس الهرم وحتى نقاط مضلع التقاطع)، يتم دوران المساقط الأفقيه لهذه الأحرف حول رأسها "مركزها" R_1 حتى يصبحوا مساقط لمستقيمات وجهيه أى يكونوا موازيين لخط الأرض، وذلك الدوران يكون (شكل **309**) حتى الخط الموازى لخط الأرض والمرسوم من R_1 ثم نصعد بهم رأسيا فنوجد مساقط نهايه النقاط على خط الأرض ، يتم توصيل هذه النقاط بالمسقط الرأسى لرأس الهرم فتكون هذه هى الأطوال الحقيقيه للحرف ، ونسقط عليها مباشره نقاط مضلع التقاطع بالخطوط الموازيه لخط الأرض من المساقط الرأسيه لمضلع التقاطع شكل **309**. بذلك يكون لدينا الأطوال الحقيقيه للأحرف ولأحرف مضلع التقاطع

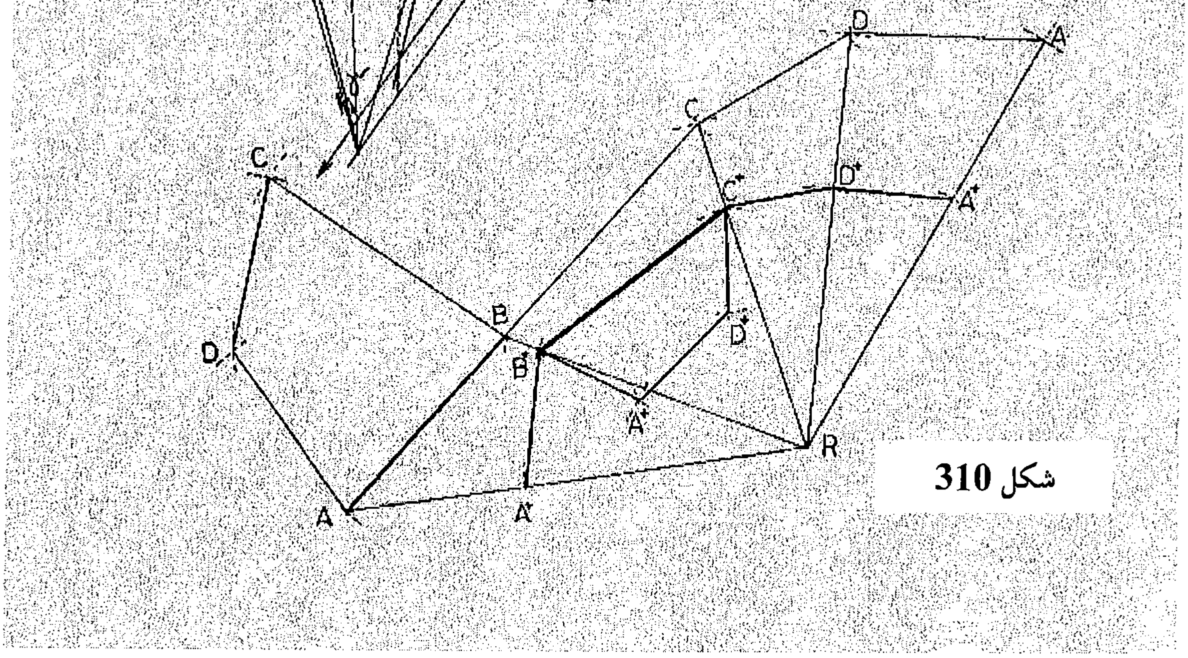
• فى شكل 310 ، لإحداث الإفراد يتم إستخدام الأطوال الحقيقيه لكل وجهه من أوجه الهرم بترتيب الأوجه الأمامى او العكسى " ABCDA او ADCBA " والحرف الذى سنبدأ به هو من ننتهى به حيث أن كل وجهه يتكون من ثلاثه أضلاع حرفين وضلع قاعدة وبداخلهم ضلع من أضلاع مضلع التقاطع لذا نبدأ كالأتى: بأخذ أى حرف وليكن RA يتم رسمه بطوله الحقيقى ونوقع عليه رموزه R,A ثم بفتحة تساوى RA^+ (مأخوذه من المسقط الرأسى بعد الدوران) نركز فى R ونقطع RA بقوس فى نقطة ستكون هى A^+، ثم نأتى بطول AD ونركزبه فى نقطة A ونصنع قوس ثم نأتى بطولRD ونركز فى R ونصنع قوس يتقاطعا معا فى D ، نأتى بطول RD^+ ونوقعه على RD وبالتالى يكون لدينا وجهه الهرم RAD كاملا. يتم إستكمال الإفراد للوجهه التالى إعتماد على أخر حرف توصلنا إليه وهو RD فيكون التالى هو RC ثم بإستخدام معه الطولDC نحصل على C ثم RB من R وكذلك CB من C فيتقاطعا ونحصل على B وأخيرا من RA وبإستخدام أيضا AB نحصل على A مره أخرى لأنها نهايه هذا الوجهه

• لوضع إفراد القاعدة نأخذ أى ضلع من الأضلاع للقاعدة وليكن AB ونضع عليه الشكل الحقيقى للقاعد بإستخدام البرجل لنقل الشكل الحقيقى حيث نركز فى A بطول AD ثم نركز فى B بطول DB فيتقاطعا فى D ثم من B نركز بالطول CB وكذلك من D نركز بالطول DC فنحصل على C

• يتم عمل ذلك بالنسبه لمضلع التقاطع كما تم فى القاعدة ولكن بإستخدام الأطوال الحقيقيه التى حصلنا عليه بالدوران



شكل 309

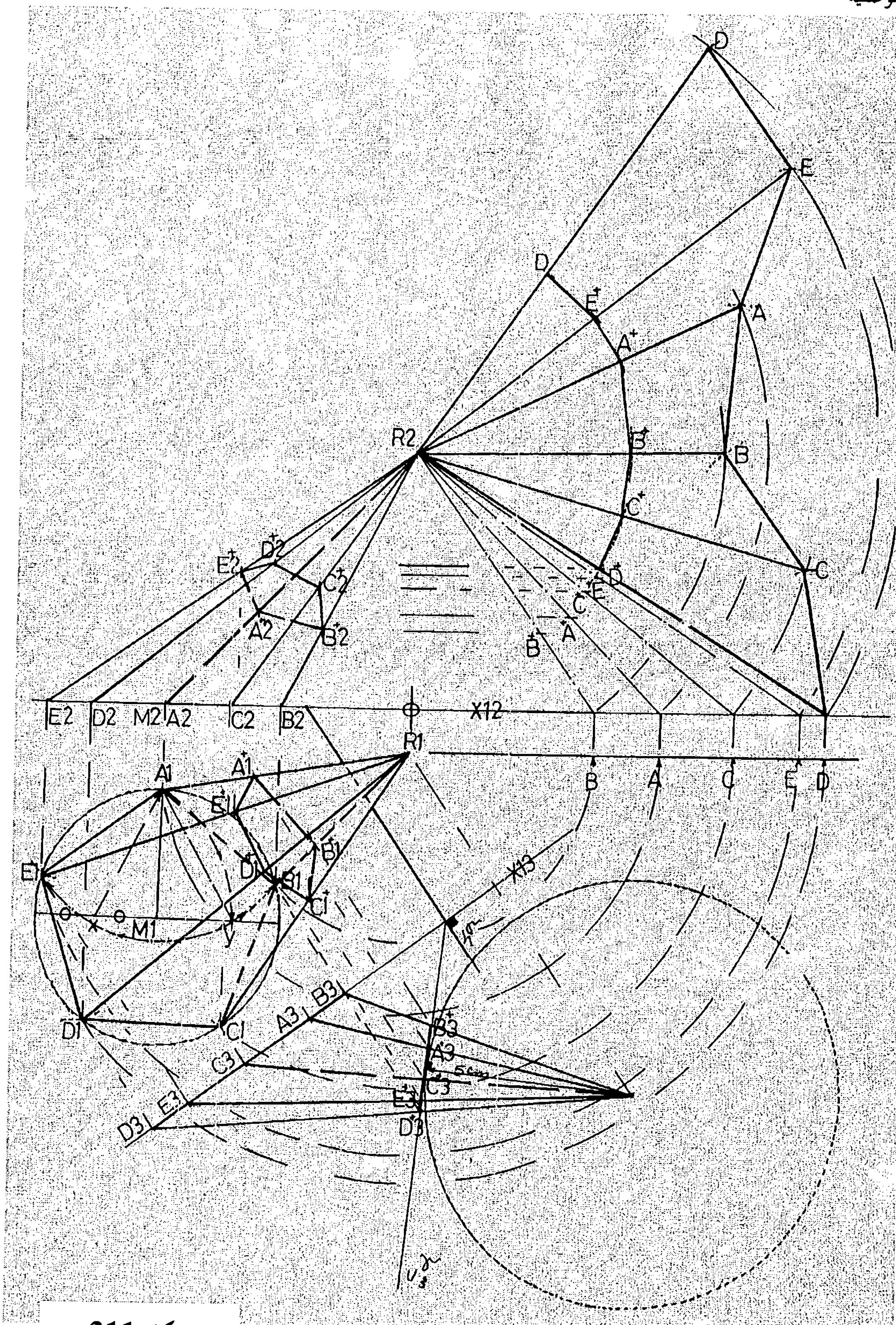


شكل 310

مثل هرم خماسى مائل رأسه R(0,1,6) وقاعدته خماسيه تقع فى المستوى الأفقى ومركزها M(-6,5,0) وأحد رؤوسها A(-62,0) ثم عين مضلع تقاطعه مع المستوى γ (-2.5,3.5,?) بحيث يبعد 5.5 cm عن رأس الهرم ثم إفرد السطح الجانبى ومضلع التقاطع

الحل:

1. من شكل **311** بإستخدام العمليات الهندسيه يتم إستكمال الشكل الحقيقى للخماسى الواقع فى المستوى الأفقى ونحصل على الهرم كاملا
2. المستوى القاطع γ معلوم منه الأثرالأفقى فقط وبالتالى يمكن رسم $\mathbf{X_{13}}$ عمودى عليه لتحويل المستوى γ الى خطى المسقط وكذلك نصبح فى π_3 والهرم كاملا كذلك فى الثلاثات وخاصه رأس الهرم
3. إذا كان المستوى القاطع يبعد عن رأس الهرم بمسافة **5.5cm** فإن المستوى فى الثلاثات يكون خطى المسقط والمفروض أن المسافه العموديه من رأس الهرم لخطى المسقط ستكون المسافه المطلوبه وبالتالى نفتح البرجل فتحه تساوى **5.5cm** ونصنع بها دائره
4. من نقطة تلاقى h^{γ} مع $\mathbf{X_{13}}$ نرسم خط يمس هذه الدائره ويكون هو α_3 للمستوى وهو خطى المسقط ومنه يمكن الرجوع لإيجاد الأثر الرأسى للمستوى
5. من خطى المسقط الناتج نستنتج نقاط مضلع التقاطع ولكن فى الثلاثات وهى $\mathbf{A_3^+\ B_3^+\ C_3^+\ D_3^+}$ $\mathbf{E_3^+}$ فنعود بها على المستقيمات المناظره أفقيا ورأسيا
6. لإحداث الإفراد لابد أن نأتى بالأطوال الحقيقيه ويتم ذلك بإستخدام الدوران كما هو واضح فى الشكل **311** على الناحيه اليمنى
7. يتم إستخدام الأطوال الحقيقيه لإيجاد الشكل الحقيققى للإفراد


D
E
D
E
A
A
R2
B
B
C
C
D
E
E2
D2
C2
A2
B2
C
B
A
E2 D2 M2 A2 C2 B2
X12
R1
B A C E D
A1
A1
E1
E1
B1
D1
B1
C1
M1
y
X13
D1
C1
B3
A3
B3
A3
C3
C3
E3
E3
D3
D3

شكل 311

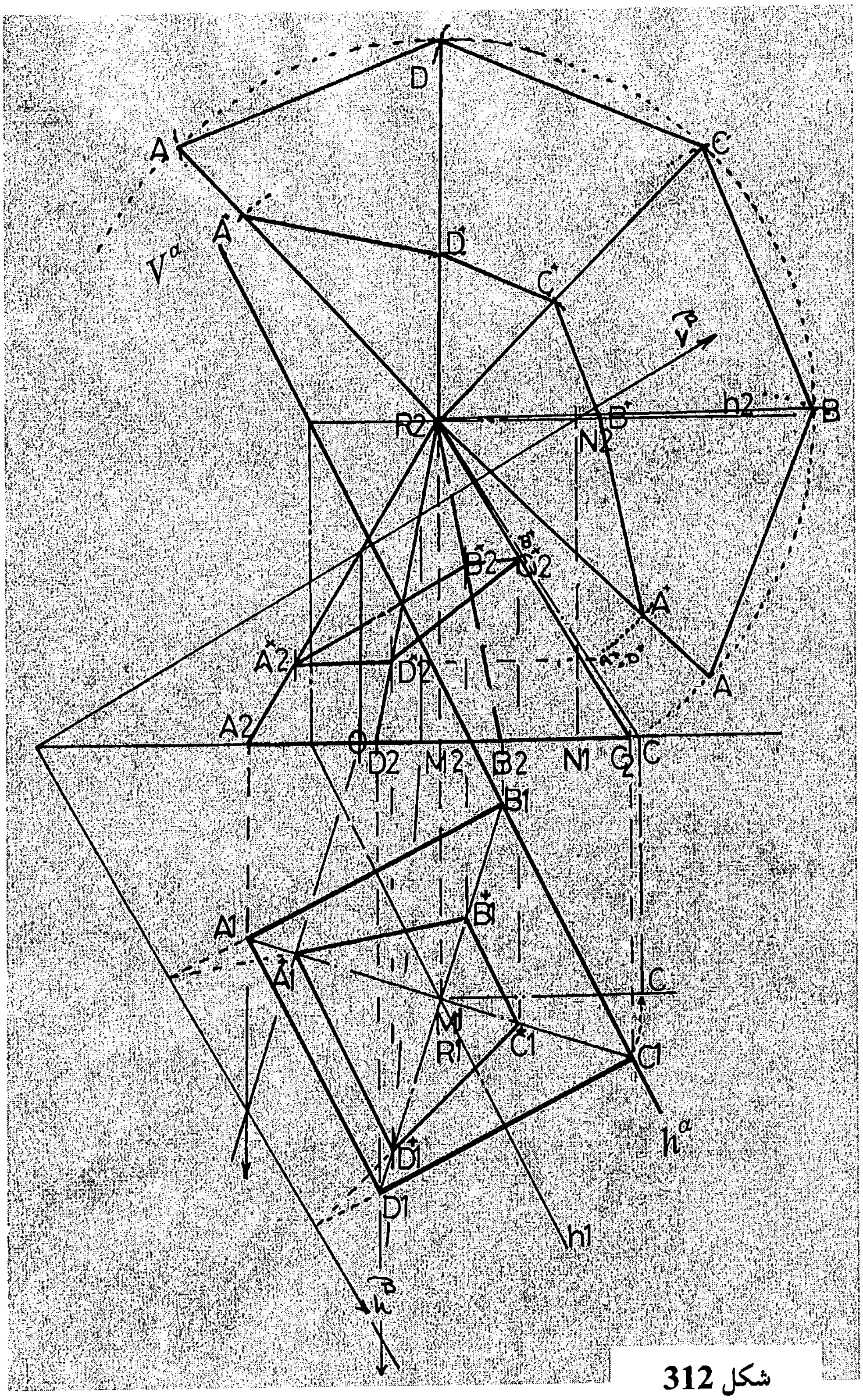
مثل هرم رباعى قائم قاعدته مربعه ABCD واقعه فى المستوى الأفقى وأحد رؤوسها A(-2,3.5,?) وأحد أوجهه الهرم يقع فى المستوى $\alpha(2,-4,4)$. أقطع الهرم بالمستوى $\beta(?,60^0,30^0)$ المار بالنقطة N(4,0,6) ثم أفرد الجزء السفلى من الهرم

الحل: من شكل **312** قاعدتة المربع **ABCD** تقع فى المستوى الأفقى أى أنها بشكلها الحقيقى وخواص الهندسه المستويه فى π_1

1. وجهه الهرم وليكن **VBC** يقع فى المستوى α أى الضلع **BC** فى المستوى α
2. من البند السابق فإن **BC** يقع فى α وفى المستوى الأفقى أى على خط تقاطعهما أى على الأثر الأفقى للمستوى α ، وعليه فإن الأثر الأفقى محل هندسى للضلع **BC**
3. من نقطة $\mathbf{A_1}$ نسقط عمود على h^α نوجد $\mathbf{B_1}$ ومن الطول المستنتج للضلع $\mathbf{A_1B_1}$ نقيس مثله على h^α فنوجد $\mathbf{C_1}$ ومن ثم نوجد $\mathbf{D_1}$ وبهذا يكون إكتمل شكل القاعدة الرباعيه الواقعه فى المستوى الأفقى والذى يقع مسقطها الرأسى على خط الأرض.
4. من مركز المربع نجد أن الهرم القائم رأسه مسقطها الأفقى $\mathbf{R_1}$ ينطبق على المركز $\mathbf{M_1}$ وبالتالى نكون حصلنا على $\mathbf{R_1}$ وهى رأس الهرم والتى تقع فى المستوى الذى يقع فيه وجهه الهرم α
5. بإستخدام مستقيم أفقى يمرر داخل المستوى α نحصل على المسقط الرأسى للرأس $\mathbf{R_2}$ وبهذا يكتمل شكل الهرم
6. إرسم المستوى β من نقطة **N** ويجوز تمرير مستقيم أفقى أو وجهى يحمل إتجاهات هذا المستوى ونحصل على أثر ومنه نرسم أثار المستوى المطلوب. ولكن فى هذه الحاله النقطة **N** تقع فى المستوى الرأسى وفى β وبالتالى فهى تقع على الأثر الرأسى للمستوى β وعليه نرسم من المسقط الرأسى لنقطة**N** الأثر الرأسى للمستوى β بزاويه ميل المستوى ومنه نرسم الأثر الأفقى للمستوى
7. بإستخدام التألف نأتى بمضلع التقاطع للمستوى β مع الهرم ويمكن للقارىء أن يستخدم التقاطع المباشر لكل حرف مع المستوى وكذلك يمكن إستخدام الإسقاط المساعد بتحويل المستوى لخطى المسقط ومعه الهرم ونأتى بمضلع التقاطع فى الثلاثات ونعود به كما فى المثال القادم.

8. الإفراد يتم من خلال إيجاد الطول الحقيقى للأحرف وفى هذه الحاله الطول واحد لكل الأحرف وعليه يتم إيجـــاد أحدهم وليكن R_1C_1 بإستخدام الدوران وكذلك الأطوال الحقيقيه من خط الأرض لنقاط مضلع التقاطع كمـــا بالشكل 312 حيث نحصل على $R_2B^+, R_2A^+, R_2C^+, R_2D^+,$

9. من R_2 سواء داخل الرسم أو خارجه يتم توقيع الطول R_2A_2 ومنه يتم الإفراد تبعا لأساليب الإفراد بالأطوال الحقيقيه للأحرف ولمثيلاتها الخاصه بمضلع التقاطع


D
A
C
A
D
V^a
C
V^b
R2
B
h2
B
N2
B2
C2
A
A2
D2
A
A2
D2
M2
B2
N1
C2
C
B1
A1
B1
A1
C
M1
R1
C1
C1
h^a
D1
D1
h1
h^b

شكل 312

المعلوم المنشور الرباعى المائل الذى قاعدته المربع ABCD الواقعة فى المستوى الأفقى وأحرفه فى وضع عام حيث $A(-2.5,3.5,5)$, $A'(4.75,5.25,0)$, $B(-3,0.75,5)$, $B'(4.25,2.5,0)$ والمطلوب تعيين مضلع التقاطع للمنشور مع المستوى γ (-7,6,3.5) وكذلك إفراد السطح الجانبى وقاعدة المنشور مبينا مضلع التقاطع.

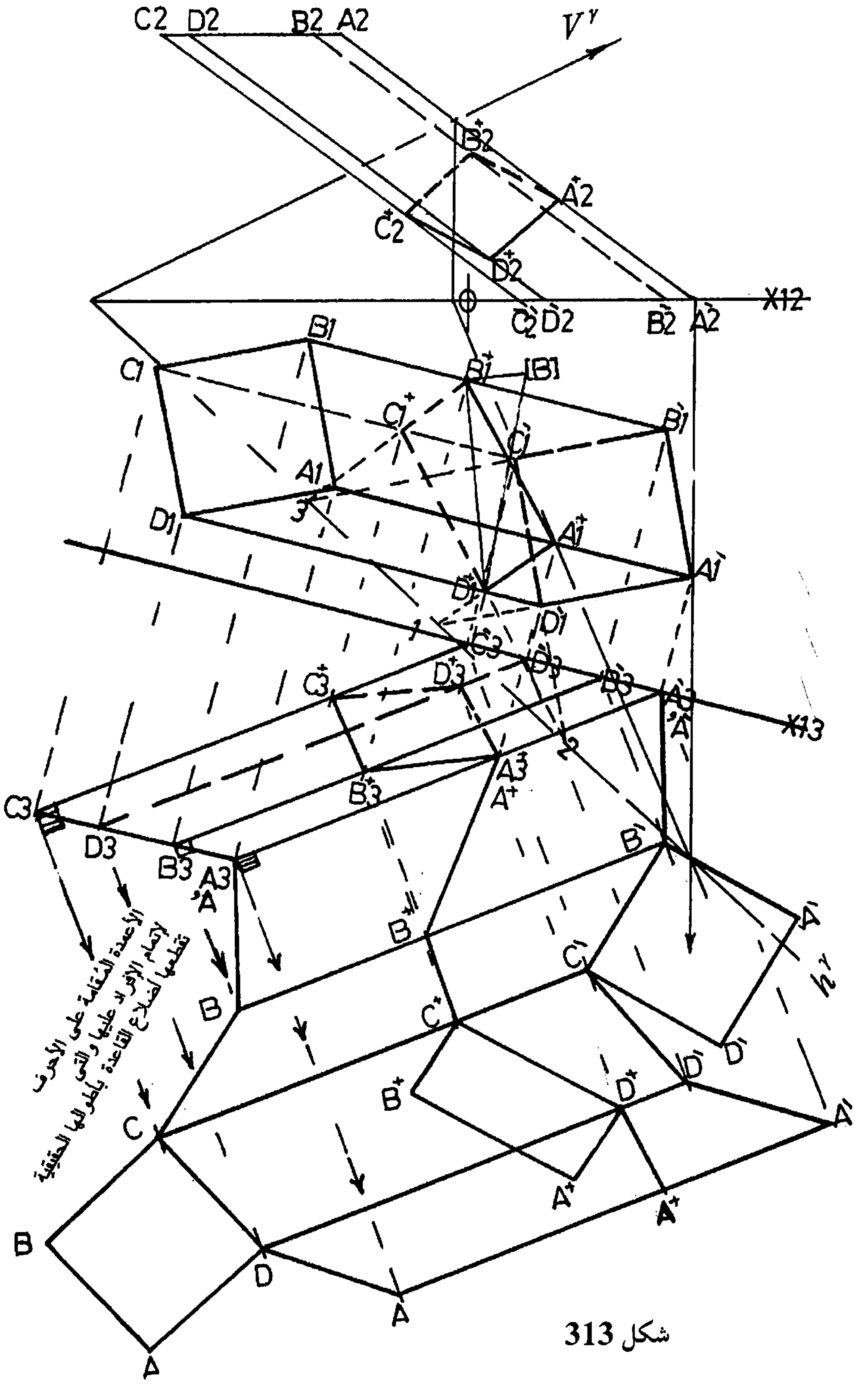
الحل: البيانات المعطاه فى شكل **313** ليس بها أى مشكلة لتمثيل المنشور. ولإيجاد مضلع التقاطع نستخدم هنا كنوع من التمرين التآلف المركزى. نبحث أولا عن تقاطع أحد الأحرف مع المستوى بإستخدام الموضع كما حدث بالحرف **AA'** فنحصل على A_1^+ ومن خلال عمليات التآلف بالنقاط **1و2و3** الحادثة على محور التآلف h^γ نوجد كل من B_1 C_1^+ D_1^+ ثم بالتناظر على المستوى الرأسى نحصل على الأحرف على النقاط A_2^+ B_2 C_2^+ D_2^+ .

لإتمام الإفراد نحاول الحصول على الأطوال الحقيقية لجميع أحرف المنشور والقاعدة ومضلع التقاطع.

<u>بالنسبة للقاعدة</u>: موجودة فى المستوى الأفقى ، لذلك هى بأطوالها الحقيقة.

<u>بالنسبة للأحرف</u>:

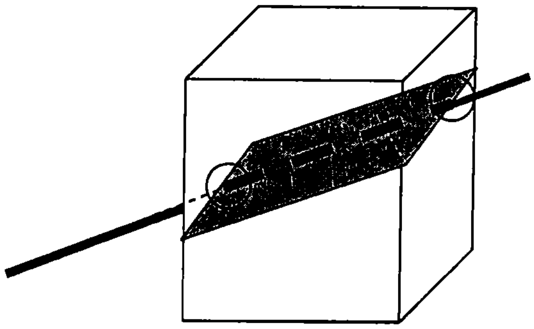
1. نتيجة لأن الأحرف متوازية فإننا نستخدم الإسقاط المساعد برسم خط أرض X_{13} موازى لأحد الأحرف فنحصل على الطول الحقيقى للأحرف وأوضاعها بالنسبة لبعض، ويمكن أن نكتفى بطول واحد لأى حرف ولكن نتيجة للإفراد المطلوب فإننا نأتى كما فى الشكل **313** بكل الأحرف لأن المنشور مائل فنحتاج أطوالها وموضعها.
2. نقيم أعمدة من كل الأحرف فى الثلاثات لتكون محل هندسى للوضع الحقيقى للأحرف فى الإفراد، حيث نبدأ الإفراد من A_3A_3'
3. نأخذ أطوال أضلاع القاعدة إبتداء من **A** فنأخذ طول ضلع القاعدة **AB** ونركز فى كل من A_3', A_3 ونقطع الأعمدة الخارجة من كل من B_3' , B_3 فنستنتج **B, B'** فى الإفراد وبنفس التسلسل نقطع الأعمدة الخارجة من C_3, C_3' بطول ضلع القاعدة **BC** ، وهكذا حتى نصل إلى A_3A_3' مرة أخرى.
4. بالنسبة لمضلع التقاطع فإن نقاطه تظهر من خلال إسقاط أعمدة مباشرة من النقاط فى الثلاثات على الأحرف بأوضاعها فنأتى بأصل النقاط على الأحرف فى الإفراد ثم نوقع على أى ضلع منهم الشكل الحقيقى لمضلع التقاطع.


C2 D2 B2 A2
X12
X13
C1
B1
A1
D1
C3
D3
B3
A3
A
B
C
D
الأعمدة المقامة على الأحرف لإتمام الإفراد عليها والتي تقطعها أضلاع القاعدة بأطوالها الحقيقية

شكل 313

إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع كثيرات السطوح

من شكل **314** نقطة تقاطع مستقيم مع كثيرات السطوح تأتى بأن نمرر بالمستقيم مستوى ، هــذا المستوى يقطع كثيرة السطوح فى مضلع ، هــذا المضلع يتقاطع مع المستقيم فى نقطتين هما نقطــتى تقاطع المستقيم مع كثيرة السطوح

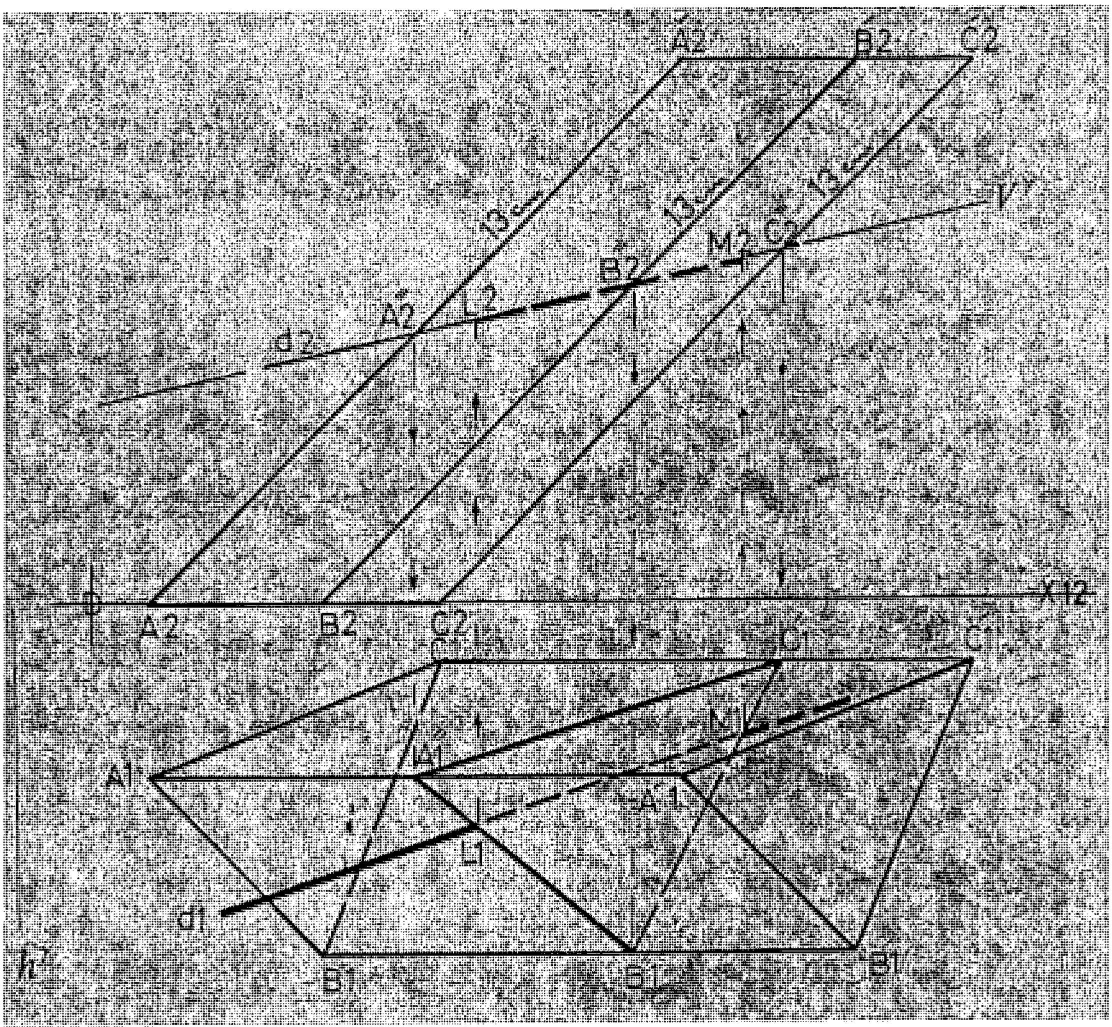


شكل **314**

مثل نقطتى تقاطع المستقيم d[(10,3,5), (13,7,3)] مع منشور قاعدته فى π_1 وهى المثلث A(1,3),B(4,6),C(6,1) وأحرفه تميل 45^0 على π_1 وطولها 13cm.

الحل:

1. نمرر بالمستقيم **d** مستوى عمودى V^{γ} على π_2 يتقاطع مع أحرف المنشور فى A_2'',B_2'',C_2'' ويكونوا مكونات مضلع التقاطع ولكن خطى المسقط لذلك مطلوب مسقط مضلع التقاطع فى المستوى الأفقى
2. نوجد المسقط الأفقى لمضلع التقاطع فيكون A_1'',B_1'',C_1'
3. نوجد نقطتى تقاطع المسقط الأفقى للمستقيم مع المسقط الأفقى لمضلع التقاطع فنجدهم L_1وM_1 فنوجد مساقطهم الرأسيه وهو المطلوب.


A2
B2
C2
13
V2
M2
B2
L2
A2
d2
X12
D
A2
B2
C2
C1
C1
C1
M1
A1
A1
A1
L1
d1
B1
B1
B1
h2

شكل 315

تمارين

1-المعلوم المستوى (-2 ، ∞، 2) α ونقطة M(0,5,5) و المطلوب تمثيل المكعب الذى مركزه M وأحد أوجهه ABCD يقع في المستوى α بحيث كان الضلع يميل 30 على الاثر الأفقي للمستوى .

2- مثل منشور رباعي قائم إرتفاعه 6 سم وقاعدته ABCD وتقع في المستوى (0,135,60) β حيث B(? ,4,2) ,A(?,2,1)

3- مثل منشور رباعي قائم إرتفاعة 8سم مركز إحدى قاعدتيه N(-3,4,4) محوره بالنقطة L(5,5,8,8) و النقطة K(0,8.5,5) تقع على أحد أحرفه .

4- مثل منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث متساوي الاضلاع ABC إرتفاعه 9 سم اذا علم الرأس A(-5,7,4.5) وكان أحد أحرفه يقع على المستقيم b(6,10.5,10),(-4,2.5,1).

5- مثل مكعب مركزه M(0,3.5,3) وأحد Hحرفة يقع المستقيم (0,5,7) , b(3,2,4).

1- المعلوم مستقيمان شماليان متعامدان أحدهما [(-2.5,4,2.5) ، (0,6.5,8)] و الأخر أفقي ويمر بالنقطة L(4.5,2,3) ، مثل المكعب الذي يقع حرفان منه على هذين المستقيمين (بإستخدام الإسقاط المساعد) .

2- مثل هرم ثلاثي منتظم يقع أحد أوجهه ABC في المستوى (-5,6,6) α حيث A(-3,1,?), B(?,4,0.5)

3- مثل هرم ثلاثي منتظم رأسه A(-1,5,4) ووجهه BCDيقع في المستوى (-2,135,60) α و الضلع CD يصنع 45 مع الأثر الأفقي للمستوى .

4- مثل هرم خماسي قائم V(2,5,5) وقاعدته تقع في المستوى (4,4,3) α وأحد أحرفه يمر بالنقطة N(-4,4,0)

5- مثل هرم رباعي قائم محوره ينطبق على المستقيم [(3.5,2.5,8.5), (-3.5,9,4)]b وأحد رؤوس القاعدة A(1.5 ,10,4.5) وطول حرف الهرم يساوى 7سم .

6- مثل هرم سداسي قائم إرتفاعه 9 سم ومركز N(0,6,3) ومحور يمر بالنقطة K(4.5,3,6) وأحد احرفه يمر بالنقطة L(0,3,4).

7- مثل ذو ثمانية أوجه منتظم إذا علم أن أربعة من رؤوس ABCD تقع في المستوى (5,5,4) α و الضلع AB يصنع 30 مع الأثر الأفقي للمستوى وكانت الرأس الخامسة E(-4,1.5,1)

8- مثل ذو ثمانية اوجة منتظم اذا كان أحد أوجهة المثلث ABC يقع في المستوى (-5,5,6.5) α وكانت النقطتان A(3,5.5,?)، B(?,2.5,0.5) رأسين من هذا الوجه .

9- مثل هرم رباعي قائم قاعدته واقعة في المستوى الأفقي ورأسة V(0,4,7) و النقطة K(-1,3.5,3.5) تقع على المستقيم المتوسط لأحد أوجهه . عين مضلع تقاطعة مع المستوى (? ، 60 ، 150) α المار بالنقطة K مع إفراد الجزء الأسفل من الهرم . أعد التمثيل للهرم ثم عين مضلع تقاطعه مع المستوى (3 ,∞ ,∞) α

10-مثل هرم خماسي مائل رأسه V(0,1,6) وقاعدته الخماسية تقع في المستوى الأفقي مركزها M(-6,5,?) وأحد رؤوسها A(-6,2,?)ثم عين مضلع تقاطعة مع المستوى (-2.5، 3.5،؟) α بحيث يبعد5.5سم رأس الهرم ثم أفراد السطح الجانبي للهرم مع مضلع التقاطع . أعد التمثيل للهرم ثم عين مضلع تقاطعه مع المستوى (∞,4,∞) α

11- مثل هرم رباعي قائم قاعدته مربع ABCD واقعة في المستوى الأفقي وأحد رؤوسها A(-2,3.5,?) وأحد أوجهه الهرم يقع في المستوى (4,-4,2) α أقطع الهرم بالمستوى (؟ ، 60 ،30) β المار بالنقطة N(4,0,6)، إفرد الجزء السفلي من الهرم .

12- مثل هرم رباعي قائم إرتفاعه 6 سم علما بأن قاعدته مربعة واقعة في المستوى الأفقي π_1 ومركزها N(0,4.5,?) و النقطتان L(-1,3.5,3.5) , K(2,4,2.5) تقعان على وجهين متقابلين في الهرم . عين مضلع تقاطع الهرم مع المستوى (∞،10,5) α

13- مثل هرم رباعي قائم إرتفاعه 6 سم علما بأن قاعدته مربعة واقعة في المستوى الأفقي π_1 ومركزها N(0,4.5,?) و النقطتان L(-1,3.5,3.5) , K(2,4,2.5) تقعان على وجهين متقابلين في الهرم . عين مضلع تقاطع الهرم مع المستوى (∞, 4,3) α

14- مثل منشور رباعي مائل إرتفاعة 8 سم وقاعدته عبارة عن مربع واقع في المستوى الأفقي ومحوره وجهي ويصنع 135 مع الأفقي و النقطتان L (2,3,4.5) , K(- 2,5,3.5) واقعتان على حرفين متقابلين في المنشور . ثم إقطع المنشور بالمستوى (∞،7.5,8) α، مثل مسقطى مضلع التقاطع مع إفراد السطح الجانبى للمنشور مع مضلع لتقاطع

15- مثل منشور رباعي مائل إرتفاعة 8 سم وقاعدته عبارة عن مربع واقع في المستوى الأفقي ومحوره وجهي ويصنع 135 مع الأفقي و النقطتان L (2,3,4.5) , K(- 2,5,3.5) واقعتان على حرفين متقابلين في المنشور . ثم إقطع المنشور بالمستوى (∞, 4,3) α

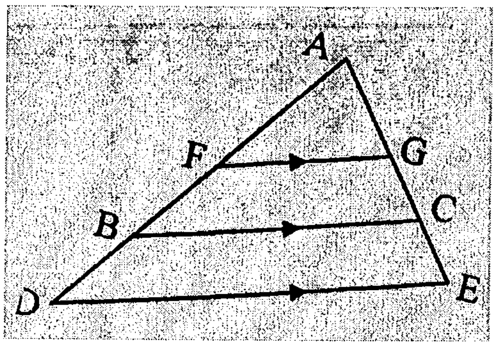
16- مثل منشور رباعى قاعدته المربع ABCD ومحوره مستقيم وجهي يميل 150 علي الأفقي ومركز أحدي قاعدتيه M (-2.5,4,8) والنقطة L(0,1,5.5) تقع على أحد أحرفه وكان إرتفاع المنشور 10 سم ثم عين مضلع تقاطعه مع المستوى (3,3,-7) α، ثم مثل إفراد السطح الجانبي للمنشور مع مضلع التقاطع . أعد التمثيل للمنشور ثم عين مضلع تقاطعه مع المستوى (∞, 4,3) α

الباب الثانى عشر

نظريات الهندسة المستوية والفراغية

بعض النظريـات والعمليات الهـامة في الهندسـة المسـتوية والفراغية

نظرية (1)



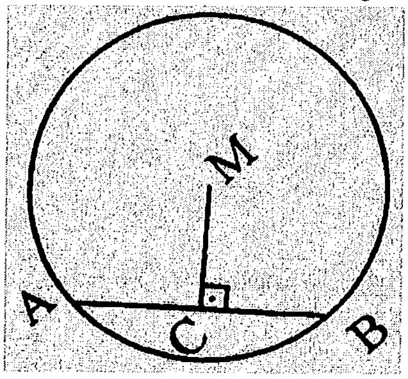
شكل 316

أي مستقيم يرسم موازي لضلع من أضـلاع مثلـث يقسـم الضلعين الاخرين او امتدادهما إلى جزئين متناسبين .

كما هو مبين بالشكل316 ، ABC مثلـث والمسـتقيمان FG,DE يوازيان الضلع BC ولذلك فإن :

$$AF/FB = AG/GC = AD/DB = AE/EC$$

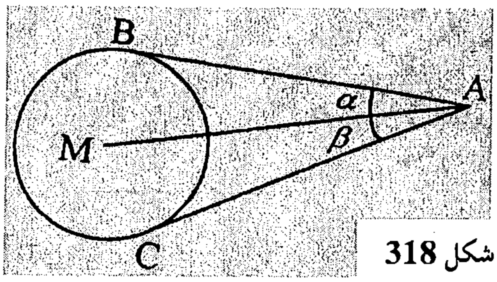
نظرية (2) :



شكل 317

المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى منتصف وتر فيها يكون عموديا عليها كما هو مبين في الشكل 317 فإن نقطة C تقع في منتصـف الوتر AB ولذلك فإن المستقيم MC يكون عموديا على الوتر AB

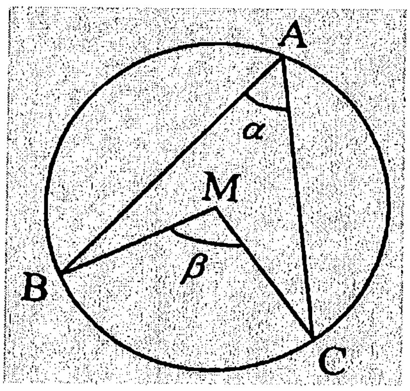
نظرية (3) :



شكل 318

المستقيم الواصل بين مركز دائرة ونقطة تلاقي مماسين لها فإنه ينصف الزاوية بينهما : المستقيمان AB,AC مماسين لدائرة مركزها M ولذلك فإن $\alpha=\beta$. شكل 318

نظرية (4) :



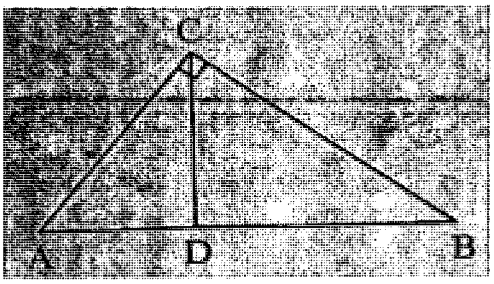
شكل 319

في أي دائرة شكل 319 ، الزاوية المركزية ضـعف الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القـوس .

الزاوية المركزية β والزاوية المحيطية α مشتركان في القوس BDC لدائرة مركزها M ولذلك فـإن

$$\beta=2\alpha$$

نظرية (5) :

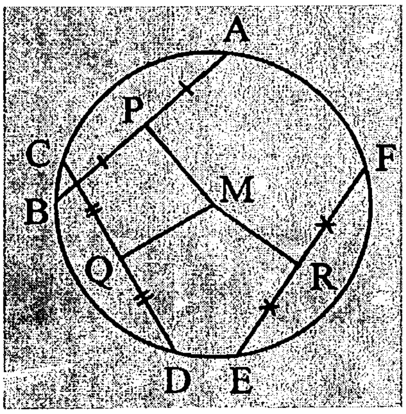


شكل 320

في المثلث القائم الزاوية إذا تم إسقاط عمود من رأس الزاوية القائمة على الوتر كان المثلثان الناتجان متشـابهان ويشـابهان المثلث الأصلي شكل 320. المثلث ABC مثلـث قـائم الزاوية في C وفيه CD عمودي على AB ولذلك تكون المثلثات BDC ، CDA ، BAC متشابهين ويكون :

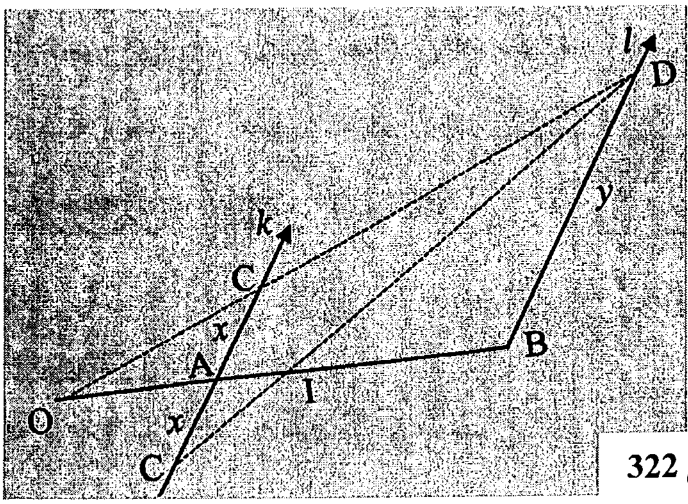
$CB^2=BD.BA$ و $CD^2=DB.DA$

نظرية (6) :



شكل 321

فى شكل 321 الأوتار المتساوية الطول داخل دائـرة ، فإنهـا جميعـا متساوية البعد عن مركز هذه الدائرة . EF,CD,AB أوتار داخل الدائرة التي مركزها M هذه الأوتار الثلاثة متسـاوية ، والـنقط R,Q,P تنصف هذه الأوتار الثلاثة على الترتيب ولذلك فإن MP =MQ =MR .



شكل 322

عملية رقم (1)

تقسيم مستقيم AB بنسـبة X إلى Y من الداخل: نرسم مـن نقطتي A,B مستقيمين متوازيين اختياريين k, l .

- نرسم من نقطةA المستقيم x=AC في أي إتجاه .
- نرسم من نقطة B المستقيم Y= BD يوازي المستقيم X بحيث يكونا في إتجاهين مختلفين من المستقيم AB ثم نصل CD فيقطع AB في نقطة I فتكون هي نقطة التقسيم من الداخل شكل 322.

عملية رقم (2)

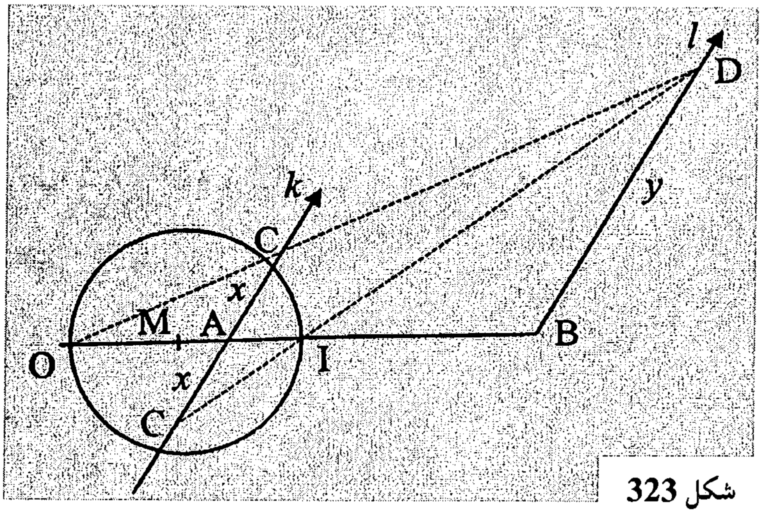
تقسيم مستقيم AB بنسبة X إلى Y من الخارج :

1- نرسم من نقطتي A,B مستقيمين متوازيين اختياريين l,k . شكل 322

2- نرسم من نقطةA المستقيم x=AC في أي اتجاه . شكل 322

3- نرسم من نقطة B المستقيم Y= BD يوازي المستقيم X بحيث يكونا في اتجاهين مختلفين من المستقيمAB

ثم نصل CD فيقطع امتداد AB في نقطة O فتكون هي نقطة التقسيم . شكل 322



شكل 323

عملية رقم (3)

المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون نسبة بعديها عن نقطتين ثابتتين A,B تساوي نسبة معلومة x إلى y (x : y) :

شكل 323

1- نعين نقطتي التقسيم من الداخل والخارج للمستقيم AB ولتكن I,O على الترتيب .

2- ننصف المستقيم OI في نقطة M .

3- نرسم الدائرة التي مركزها M ونصف قطرها يساوي المسافة OM فتاكون هي دائرة ابو لونيوس .

عملية رقم (4)

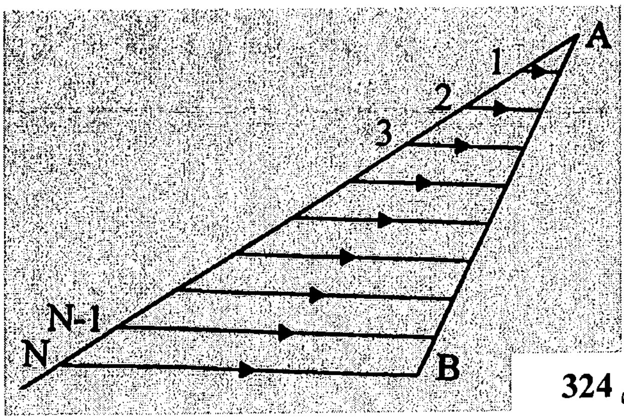
تقسيم جزء من مستقيم AB إلى عدد N من الاجزاء المتساوية .

1- نرسم من أحدى نهايتي المستقيم AB وليكن A مستقيما إختياريا بحيث يصنع مع المستقيم AB زاوية مناسبة .

2- نقيس على المستقيم عدد N من الأجزاء المتساوية الطول عند النقط 1,2,3 ....N,N-1

3- نصل أخر نقطة (N) بنقطة B .

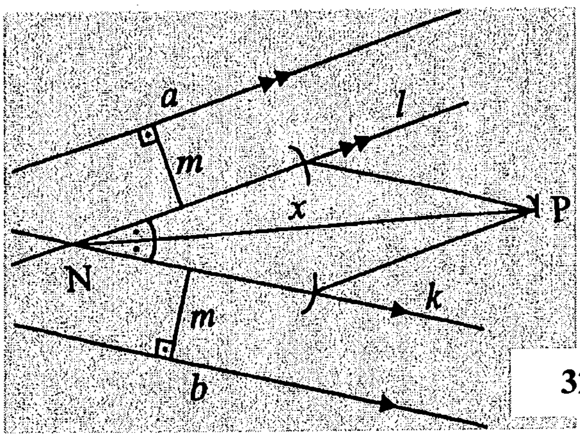
4- نرسم فى شكل 324 من النقط 1,2,3 ....N مستقيمات توازي المستقيم NB فتقطع المستقيم AB في (N-1) من النقاط التي تقسم المستقيم AB إلى عدد N من الأجزاء المتساوية.



شكل 324

عملية رقم (5)

رسم مستقيم x ينصف الزاوية المحصورة بين المستقيمان a,b حيث نقطة تلاقيهما خارج نطاق صفحة الرسم شكل 225.



شكل 325

1- نرسم مستقيم l يوازي المستقيم a ويبعد عنه مسافة عمودية m .

2- نرسم مستقيم k يوازي المستقيم b ويبعد عنه مسافة عمودية m .

يجب أن نراعى الأتي:

1- المستقيمان l,k يقعا بين المستقيمين a ,b .

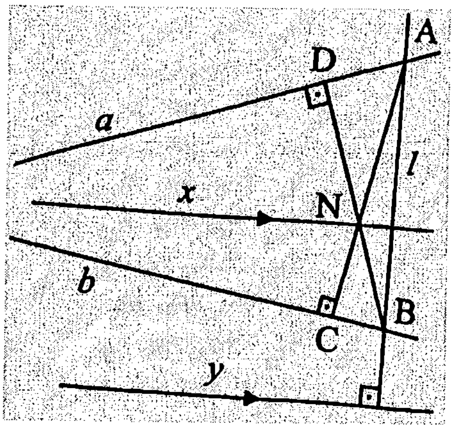
2- إختيار المسافة m بحيث تسمح بتقاطع المستقيمين l, k في النقطة N والتي تقع داخل حدود صفحة الرسم .

3- من نقطة N وبفتحة فرجار مناسبة نرسم قوس يقطع المستقيمين l, k في نقطتين .

4- من النقطتين السابقين وبنفس الفتحة السابقة نرسم قوسين يتقاطعان في نقطة P .

5- نصل بين النقطتين N,P فيكونا المستقيم x المنصف للزاوية المحصورة بين المستقيمين a , b .

عملية رقم (6)



شكل 326

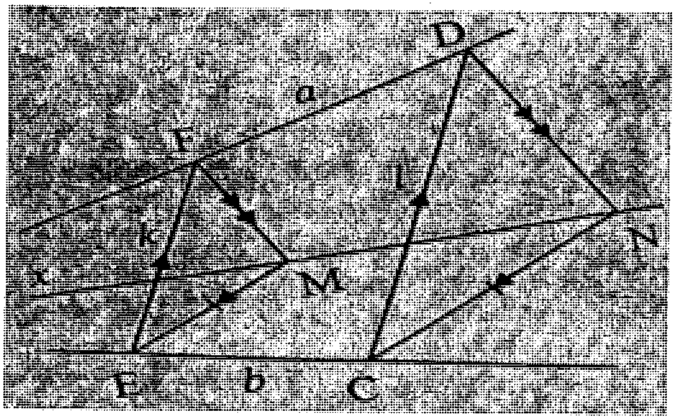
رسم مستقيم x يوازي إتجاها معلوم y ويمر بنقطة تلاقي المستقيمان b, a حيث نقطة تلاقي المستقيمان خارج حدود الصفحة .

شكل 326

1- نرسم مستقيم إختياري l عمودي على الإتجاه المعلوم والمحدد بالمستقيم y فيقطع المستقيمان a, b في النقطتين A B على الترتيب .

2- نسقط من النقطتين A, B عمودين AC وBD على الترتيب فيتقاطعان في N .

3- نرسم من نقطة N المستقيم x الموازي للإتجاه المعلوم y فيكون هو المستقيم المطلوب .



عملية رقم (7)

رسم مستقيم x يمر بالنقطة N ويمر كذلك بنقطة تلاقي مستقيمان a , b حيث نقطة تلاقي المستقيمان خارج حدود الصفحة .

شكل 327

1- نرسم مستقيمين متوازيين اختياريين l , k يقطعا المستقيمين a ,b في النقط F , E , D, C على الترتيب .

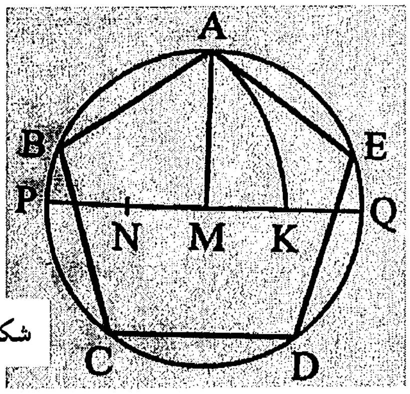
2- نصل المستقيمين NC, ND .

3- نرسم من النقطتين F , E مستقيمين يوازيان المستقيمان DN , CN فيتقاطعا في نقطة M .

4- نصل بين النقطتين M , N لايجاد المستقيم المطلوب .

عملية رقم (8)

رسم شكل خماسي منتظم بمعلومية مركزه M وأحد رؤوسه A .



شكل 328

1- نرسم دائرة مركزها M ونصف قطرها يساوي MA . شكل 328

2- نرسم من M مستقيما عموديا على MA فيقطع محيط الدائرة في النقطتين Q , P .

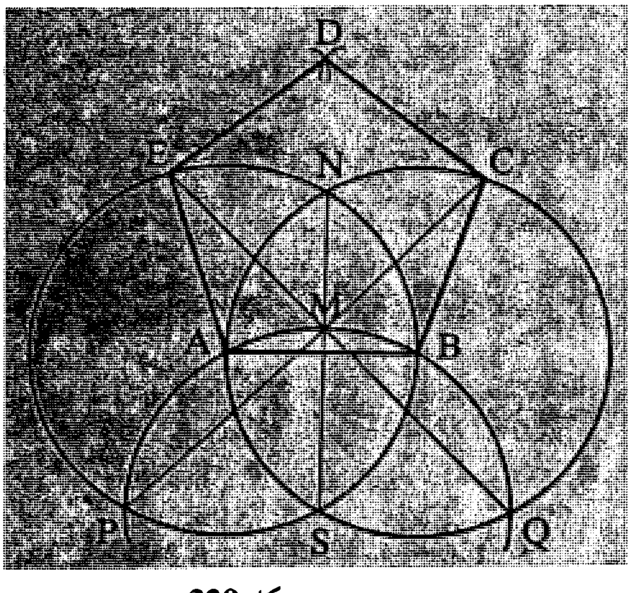
3- نصف MP في نقطة N ونرسم قوسا بنصف قطر يساوي الطول A ومركزه نقطة N فيقطع MQ في نقطة K .

4- نقيس المسافة AK فتكون هي ضلع المخمس .

5- نرسم من A قوسا بنصف قطر يساوي طول ضلع المخمس فيقطع الدائرة في نقطة B ومنها نرسم قوسا أخر بطول ضلع المخمس فيقطع الدائرة في نقطة C وهكذا برسم أقواسا أخرى نحصل على النقط D , E .

6- نصل بين النقط A , B , C , D , E فنحصل على الشكل الخماسي المطلوب .

عملية رقم (9)



شكل 329

رسم خماسي منتظم بمعلومية أضلاعه AB

1- نرسم دائرتين مركزاهما A , B ونصف قطر كل منهما = المسافة AB فتتقاطع الدائرتين في N, S . شكل 329

2- نصل المستقيم SN .

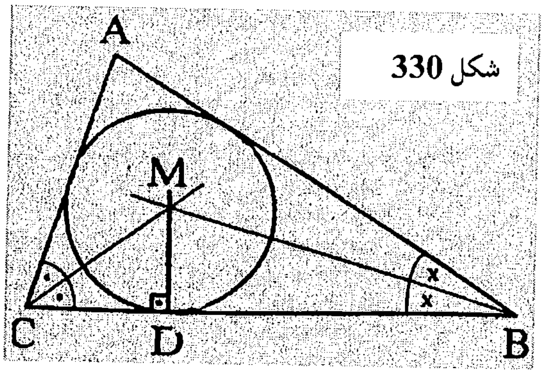
3- نرسم قوسا من دائرة بنفس القطر السابق ومركزها النقطة S فتقطع الدائرتان في النقطتين P , Q وكذلك تقطع المستقيم NS في نقطة M .

4- نصل المستقيم QM ونمده حتى يلاقي الدائرة التي مركزها A في نقطة E .

5- نصل المستقيم حة ونمده حتى يلاقي الدائرة التي مركزها B في نقطة C .

6- من النقطتين C , E نرسم قوسان بنفس فتحة الفرجار السابقة فيتقاطعا في نقطة D .

7- نصل EA , DE, CD , BC فنحصل على الشكل الخماسي المطلوب .



شكل 330

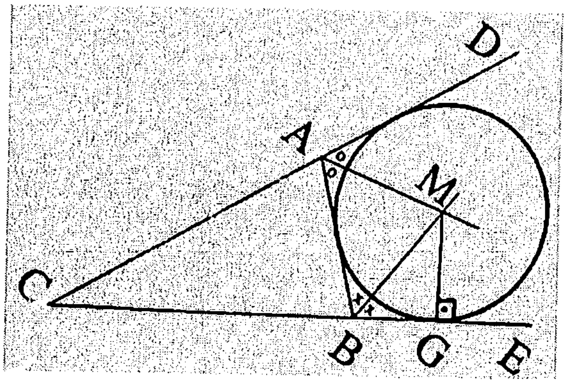
عملية رقم (10)

رسم دائرة تمس أحد أضلاع مثلث وتقع داخله

1- ننصف الزاوية A B C بمستقيم يتلاقى مع المستقيم المنصف للزاوية ABC في نقطة M .

2- نسقط عمود من نقطة M على الضلع CB فيقطعه في D . شكل 330

3- نرسم الدائرة التي مركزها M ونصف قطرها يساوي المسافة MD فتمس الثلاثة أضلاع من الداخل.



شكل 331

عملية رقم (11)

رسم دائرة تمس أحد أضلاع مثلث وتقع خارجه .

1- نمد المستقيم CA إلى نقطة مناسبة ولتكن نقطة D ثم نمد المستقيم CB إلى نقطة مناسبة اخرى ولتكن نقطة E . شكل 331

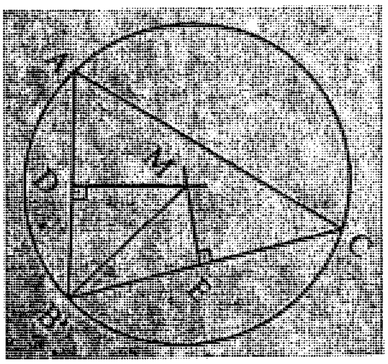
2- ننصف الزاوية DA B بمستقيم يتلاقى مع المستقيم المنصف للزاوية ABE في نقطة M .

3- نسقط عمود من نقطة M على الضلع EB فيقطعه في G .

4- نرسم الدائرة التي مركزها M ونصف قطرها يساوي المسافة MG فتمس الضلع AB وامتداد الضلع CA وامتداد الضلع CB .

عملية رقم (12)

رسم دائرة تمر برؤوس المثلث .



شكل 332

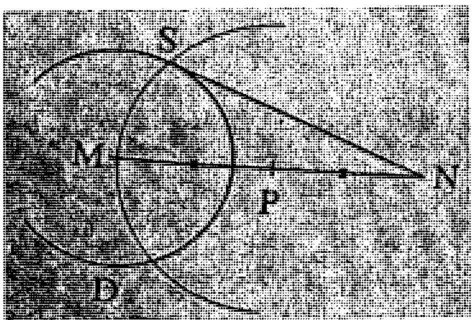
1- ننصف المستقيم AB في نقطة D ونقيم عمودا على المستقيم من نقطة D . شكل 332

2- ننصف المستقيم BC في نقطة E ونقيم عمودا على المستقيم من نقطة E فيتلاقى مع المستقيم السابق في نقطة M .

3- نصل نقطة M بنقطة B ثم نرسم دائرة مركزها M ونصف قطرها = طول المستقيم MB فتكــون هــي الدائرة المطلوبة .

عملية رقم (13)

رسم مماس دقيق لدائرة مركزها M من نقطة خارجها N شكل 333



شكل 333

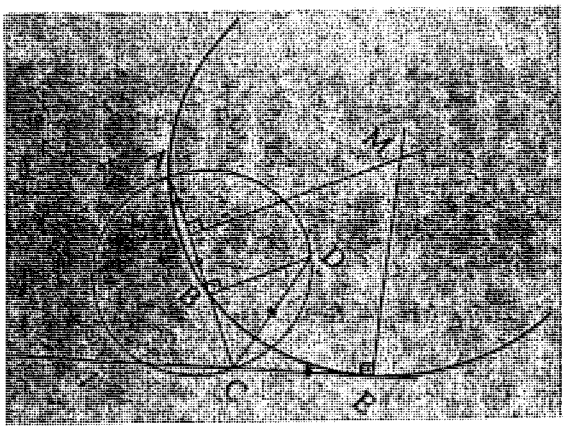
1- نصل النقطــة M بالنقطــة N ثم ننصــف المستقيم MN في نقطة P .

2- نرسم من نقطة P قوس من دائرة نصف قطرها = PN فيقطع الدائرة السابقة في نقطة S .

3- نصل نقطة N بنقطة S فيكون المســتقيم NS هو المماس المطلوب .

عملية رقم (14)

رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين A , B وتمــس مستقيما معلوما l شكل 334



شكل 334

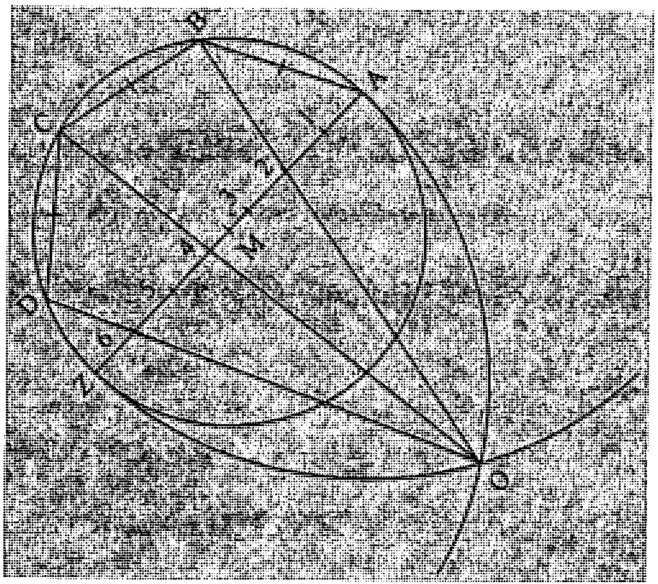
1. نمد المستقيم AB حتى المستقيم l في نقطة C

2. نجعل AC قطرا في الدائرة

3. نقيم عمودا من نقطة B على AC يقطع الدائرة في نقطة D .

4. نوقع E على المستقيم l بحيث يكون CD = CE وبذلك تكون نقطة E هي نقطة تماس الدائرة المطلوبة مع المستقيم l .

5. نقيم عمودا على المستقيم l من نقطة E نقيم عمودا على المستقيم AB من منتصفه ، فيتقاطع العمودين في نقطة M فتكون هي مركز الدائرة المطلوبة ونصف قطرها = الطول ME .



شكل 335

<u>عملية رقم (15)</u>

رسم أي مضلع منتظم بمعلومية مركزه M وأحد رؤوسه A . شكل 335

1- نرسم دائرة مركزها M وتمر بالنقطة A .

2- نُقسم القطر AZ إلى عدد من الأقسام يساوى عدد أضلاع المضلع

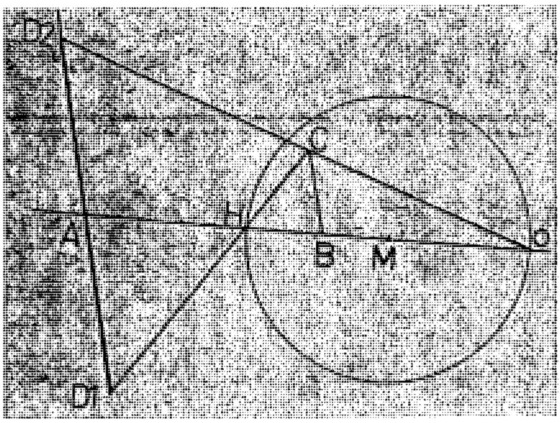
3- نرسم قوسين بفتحة فرجار تساوى AZ ومركزها النقطتين A,Z فيقطعا بعض فى O

4- نصل النقطة 2 بالنقطةO حتى يقطع محيط الدائرة M فى B وهو طول ضلع المضلع

5- نتابع قطع الدائرة بهذا الطول

دائرة أبولو نيوس

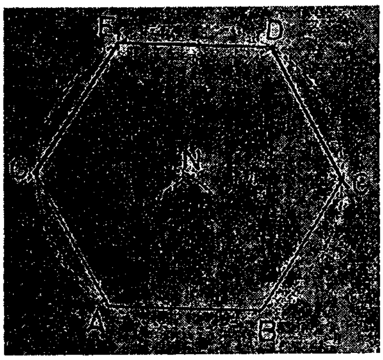
هي المحل الهندسي النقطة تتحرك بحيث تكون نسبة بعديها عن نقطتين ثابتتين B،A تساوي نسبة معلومة X ،Y. نقوم بتقسيم المسافة بين النقطتين من الداخل و الخارج فنحصل على نقطة التقسيم من الداخل و الخارج وهما O وH، ويكون OH عبارة عن قطر دائرة (دائرة ابولونيوس) ومركزها M وهى المحل الهندسي للنقطة المطلوبة.



شكل 336

رسم المسدس المنتظم إذا علم أحد أضلاعة AB أو مركزة وأحد رؤوسة

- معلوم الضلع AB نركز في A، B بفتحة تساوى AB ونرسم قوسين يتقاطعان في N هي مركز دائرة المسدس، نرسم الدائره.
- بالطول AB نركز في B ونقطع محيط الدائرة على التوالي فنحصل على G،E،D،C .

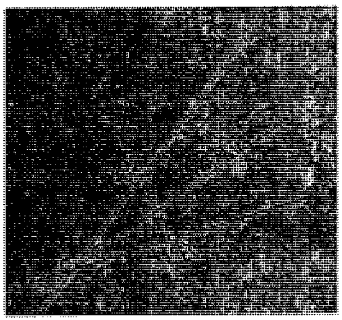


شكل 337

- واذا كان معلوم مركز المسدس وأحد رؤوسة نرسم دائرة من N بالمسافة بين المركز و الرأس ونقسمها بهذا الطول ابتداء من الرأس المعلومة فنحصل على باقي رؤوس المسدس .

تنصيف الزاوية بين مستقيمين

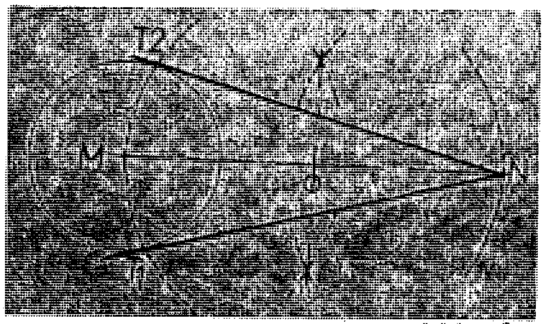
- يمكن عمل التنصيف من خلال فتحة برجل واحدة نركزها في O فتقطع المستقيمين في النقطتين A، B


شكل 338

- بنفس الفتحة او فتحة اخرى نركزها في كل من A وB ونرسم قوسين يتقاطعان في C .

- نصل OC فيكون هو المنصف للزاوية بين المستقيمين .

رسم مستقيم يمس دائرة معلومة M من نقطة خارجها N



شكل 339

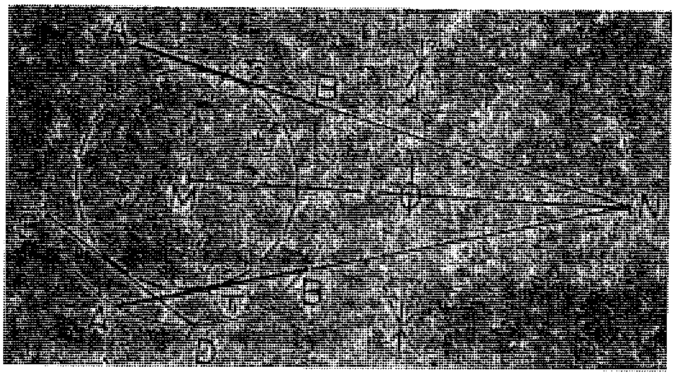
- ننصف المسافة بين M،N فنحصل على O

- من O نرسم دائرة بنصف القطر OM ويقطع الدائرة في T2،T1

- T2،T1 هما نقطتى التماس نصلهم بالنقطة N

-يكون NT2،NT1 هما المماسين من النقطة N للدائرة M.

رسم قاطع يمر بنقطة معلومة N ويقطع الدائرة في وتر AB بطول L



شكل 340

- نختار أى نقطة C على الدائرة وبالطول L نركز في C ونقطع محيط الدائرة فيكون في D حيث L=CD

-من M نرسم دائرة تمس المستقيم CD

- ننصف بين M،N فنحصل على O

- من O نرسم دائرة OM فنحصل على T2،T1 نصلهم بN

وللتأكد من صحة الحل نجد أن AB الناتج يساوى L

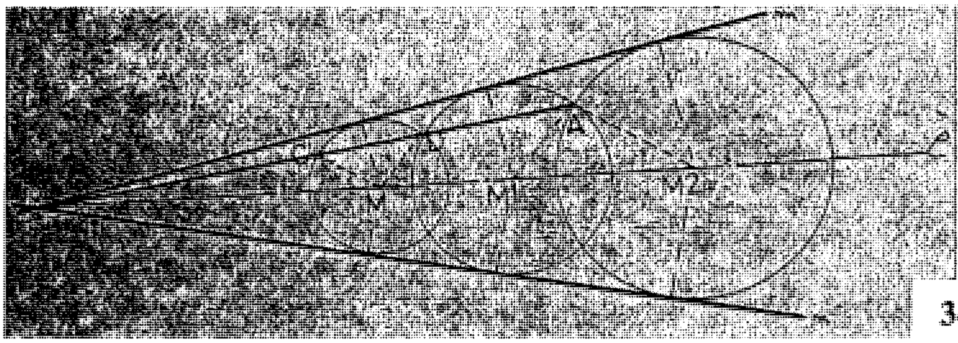
رسم دائرة تمس مستقيمين متقاطعين m ،n وتمر بالنقطة A

– ننصف الزاوية بين المستقيمين m ،n فنحصل على المستقيم المنصف l هو الحل الهندسي لأى دائرة تمس المستقيمين

– نرسم اى دائرة على المستقيم l من اى نقطة اختياريه عليه ولتكن M تمس المستقيمين

– نصل OA فتقطع الدائرة المرسومه من M في النقطتين D وC

– من نقطة A نرسم موازى ل MC و MD يقطعا l في مركزين M1،M2 هذا الحل الهندسي للدائرتين اللـــذان

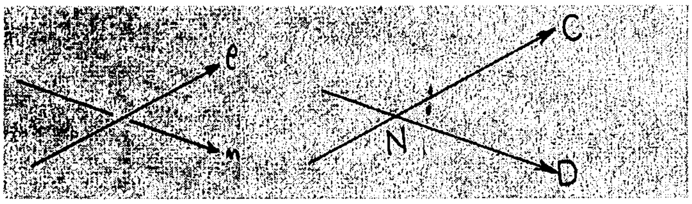


شكل 341

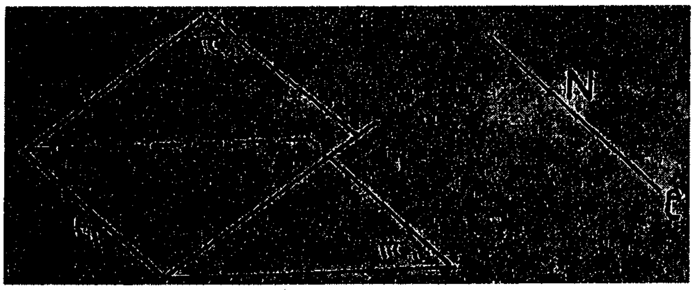
يمران بالنقطة A ويمسا المستقيمين m وn.

رسم مستوى يمر بنقطة معلومـة N ويوازى مستقيمين شماليين n،e

نرسم من النقطة N مســـتقيم يـــوازى l فيكون c. نرسم من النقطة N مســـتقيم يوازى n فيكون D. المستوى المكون من المستقيمين C ، D هـــو المســـتوى المطلوبة



شكل 342

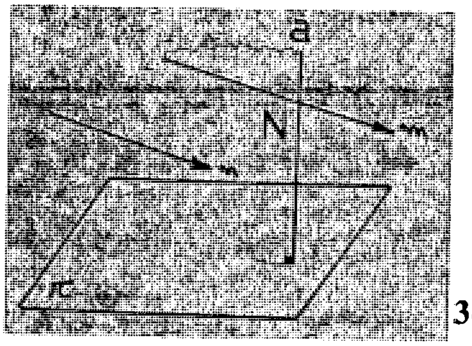


شكل 343

رسم مستقيم من نقطة N يوازى مستويين معلومين π_1, π_2

نعين خط تقاطع المستويين π_1, π_2 فيكون هو e_1 . نرسم من النقطة Nمستقيم e موازى ل e_1 وهو المطلوب

رسم مستوى يمر بنقطة N ويوازى إتجاه معلوم m وعمودى على المستوى π

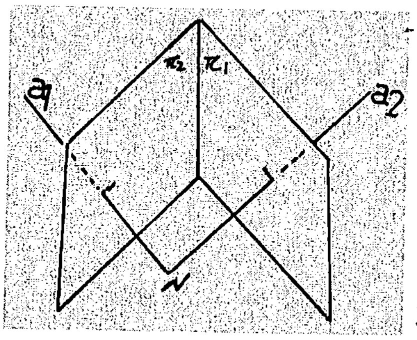


شكل 344

فى الشكل 344 نرسم من N مستقيم m يـوازى الإتجاه المعلوم n

نرسم من Nمستقيم عمودى a علـى المسـتوى المعلوم π المستوى المطلوب هو المستوى المكون من المستقيمين الموازى m و العمودى a .

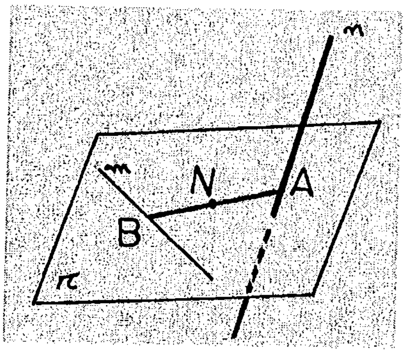
رسم مستوى يمر بنقطة N وعمودى على مستويين π_1, π_2



شكل 345

نرسم من N مســتقيمين a_1 وa_2 عمــوديين علـى π_1, π_2 المستوى المطلوب هو المكون من المســتقيمين العموديين

رسم مستقيم يقطع مستقيمين شماليين m،n ويمر بنقطة معلومة N



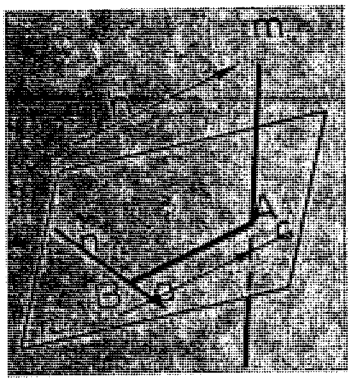
شكل 346

كون من النقطة N و المستقيم m أحــد المســتقيمين الشماليين مستوى π

نعين نقطة تقاطع المستقيم الأخر n مع هذا المســتوى فيكون في A . نصل N،A ونمده فيقطع m في B

فيكون ANB هو القاطع للمستقيمين الشماليين

رسم مستقيم يقطع مستقيمين شماليين m،n و يوازى إتجاه معلوم h

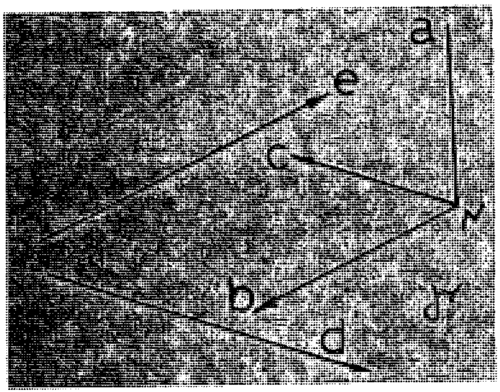


شكل 347

من نقطة إختيارية على أحد المستقيمين وليكنn نختار نقطـة مثل D ونرسم موازى للمستقيم h فيكون CD مـوازى ل h من على n . المستقيم n،CD يكونان المستوى π ، نعين تقاطع المستقيم m مع المستوى π فيكون A نقطة التقاطع من A نرسم موازى لCD فيكون AB حيث B تقاطعـة مع n ، المستقيم AB هو المستقيم المطلوب

تعيين أقصر قاطع للمستقيمين الشماليين m، n

الطريقة الأولى



شكل 348

نختار نقطة إختيارية مثل N ونرسم منها موازيان للمستقيمين e ،d الشماليين فنحصل علـى b ،c مكونات مستوى . نقيم عمـودى علـى المستوى فيكون a هذا هو الإتجاه المطلوب .

تكرر خطوات البند السابق

الطريقة الثانية

من نقطة اختيارية على المستقيم n يرسم المستقيم d الموازى للإتجاه m

المستقيمان المتقاطعان n ،d يكونان المستوى T

من نقطة إختيارية مثل x على m نسقط منها العمودى على المستوى π فيتقاطع مع المستوى π في Y

نرسم من Y مستقيم موازى للمستقيم d فيتقاطع مع n في B

نقيم من B المستقيم العمودى على π فيتقاطع مع m في نقطة A فيكون AB أقصر بعد بين المستقيمين وعمودى عليهما

نظريات

نظرية (1) كل مستويين يشتركان في نقطة يشتركان في مستقيم

نظرية (2) كل مستويان يشتركان في ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة ينطبق أحدهما على الأخر مهما امتدا

نظرية (3) يتعين المستوى

1- إما بثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة

2- مستقيم ونقطة خارجة عنه .

3- مستقيمان متقاطعان .

4- مستقيمان متوازيان

نظرية (5) إذا توازى مستقيمان فإن أي مستوى يقابل أحد هما يقابل الثاني

نظرية (6) إذا توازى مستقيمان فكل مستوى مار بأحدهما إما أن يوازي الثاني أو يمر به

نظرية (7) إذا توازى مستويان فإن أي مستقيم يقطع أحدهما يقطع الثاني .

نظرية (8) المحل الهندسي لجميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة معلومة عليه هو مستوى عمودي على ذلك المستقيم .

نظرية (9) يتعين وضع المستوى بمستقيم عمودي عليه ونقطة يمر بها المستوى .

نظرية (10) إذا تعامد مستقيم على كل من مستقيمين متقاطعين في نقطة تقاطعهما كان عموديا على مستواهما .

نظرية (11) الزاوية المحصورة بين أي مستقيم مائل ومسقطه على المستوى أصغر من الزاوية المحصورة بين المائل وأي مستقيم اخر في المستوى مارا بموقع المائل .

نظرية (12) كل مستقيمين ليسا في مستوى وأحد يمكن أن يمد بينهما مستقيم عمودي على كل منهما ولا يمكن مد سواه ، وهذا المستقيم العمودي هو أقصر بعد بين المستقيمين ويعرف هذان المستقيمان بالمستقيمين الشماليين .

نظرية (13) كل مستقيمين ليسا في مستوى وأحد يمكن ان يمر بهما مستويان متوازيان

نظرية (14) كل مستوى مار بمستقيم عمودي على مستوى يكون عموديا على ذلك المستوى

نظرية (15) إذا كان كل من مستويين متقاطعين متعامدين على مستوى ثالث فخط تقاطعهما يكون عمــودا علــى ذلــك المستوى والزاوية الزوجية هي الزاوية بين مستتويين متقاطعين وتقاس بالزاوية المحصورة بن عمودين مقامين على خط تقــاطع المستويين من أي نقطة عليه بحيث يكون أحد العمودين في مستوى الاخر .

نظرية (16) اذا مد مائل من نقطة خارج مستوى وكان عموديا على مستقيم في هذا المستوى فإن مسقط المائل على المستوى يكون عموديا على المستقيم .

نظرية (17) الزاوية القائمة تسقط عموديا على مستوى المسقط في زاوية قائمة اذا كان أحد اضلاعها يوازي مستوى المسقط

المحل الهندسي عبارة عن المسار الذي تصنعه عناصر الفراغ بحيث تحقق شروط هندسية معينة

أولا : المستوى

1. المحل الهندسي لجميع النقط التي تبعد عن نقطة ثابتة M بعدا ثابتا h هو عبارة عن محيط دائرة مركزها M ونصف قطرها h.

2. المحل الهندسي لجميع النقط التي تبعد بعدا ثابتا h عن مستقيم معلوم هو عبارة عن مستقيمين m, n يواز ين المستقيم المعلوم l ويبعدان عنه بعدا يساوي h .

3. المحل الهندسي لجميع النقط التي على أبعاد متساوية من نقطتين ثابتتين A,B هو العمود المقام h من منتصــف الخط الواصل بين النقطتين A,B من منتصفه.

4. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين l , k هو المستقيم h الموازي لهما ويقع في منتصف المسافة بينهما .

5. المحل الهندسي لجميع النقط التي على أبعاد متساوية عن مستقيمين متقاطعين l , k هو عبارة عــن منتصــف الزاويتين بين هذين المستقيمين حيث المستقيمين h , j هما المنصفين للزاويتين بين المســتقيمين مــن الــداخل والخارج

6. المحل الهندسي لرؤوس الزوايا التي مقدارها Φ بحيث تمر اضلاعها بنقطتين ثابتتين A,B هو عبارة عن قــوس دائرة مرسومة على AB ويقابل الزاوية Φ واذا كانت تقابل زاوية قائمة فالمحل الهندسي عبارة عــن محــيط دائرة قطرها AB

7. إذا مررت أوتار في دائرة مركزها M بنقطة مثلA داخل الدائرة فإن المحل الهندسي لمنتصف هذه الأوتار هو محيط الدائرة المرسومة على A M مأخوذا قطرا لها .

8. المحل الهندسي لجميع النقط التي يرسم منها مماسات متساوية الطول لدائرة مركزها M ونصف قطرها هو البعد الواصل بين المركز وإحدى هذه النقط .

9. المحل الهندسي لنقطة تتحرك بشرط أن نسبة بعديها عن نقطتين A , B تساوي نسبة معلومة هو عبارة عن محيط دائرة قطرها المستقيم المحصور بين نقطتي تقسيم A , B من الداخل والخارج بنفس النسبة المعلومة وتسمى (دائرة أبو لونيوس)

ثانيا : في الفراغ

1. المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفراغ وتبعد عن نقطة ثابتة M بعدا ثابتا h هو سطح كرة مركزها M ونصف قطرها h .

2. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والتي بعدها h عن مستقيم معلوم هو سطح إسطوانة دائرية قائمة محورها المستقيم المعلوم ونصف قطرها h .

3. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن نقطتين ثابتتين هو المستوى العمودي على A B من منتصفه .

4. المحل الهندسي للنقط التي تبعد مسافة h عن مستوى معلوم α هو مستويانβ,γ على جانبي المستوى α وكل منهما على بعد h منه .

5. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والمتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين هو عبارة عن المستوى العمودي على مستوى المستقيمين المعلومين والذي يمر بمنتصف المسافة بين المستقيمين .

6. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والمتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين هو عبارة عن المستوي العمودي على مستوى المستقيمين المعلومين والذي يمر بمنتصف الزاوية بين المستقيمين .

7. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستقيمين شماليين هو المستوى العمودي على اقصر قاطع لهما من منتصفه ولتوضيح ذلك نختار مستقيما m يقطع المستقيمان الشماليين l ,k في نقطتي A,B ثم ننصف المسافة AB في نقطة C ونرسم منها مستقيمان p , q يوازيان المستقيمان l , k ويكونان المستوى α المطلوب .

8. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستويين متوازيين هو مستوي يوازيهما ويقع في منتصف المسافة بينهما .

9. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستويين متقاطعين β, α هو المستويان Φ,ψ المنصفان للزاوية الزوجية الواقعة بينهما والزاوية المكملة .

10. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والتي نسبة بعديها عن نقطتين ثابتتين B, A تساوي نسبة معلومة ثابتة x الى y هو عبارة عن سطح الكرة التي نهايتي اقطارها هما نقطتي التقسيم من الداخل I والخارج O بنفس النسبة وتعرف بكرة ابو لونيوس .

11. المحل الهندسي للنقط التي تتحرك بحيث نسبة بعديها عن مستقيمين متوازيين k , l تساوي نسبة ثابتة هو إسطوانة تعرف(بإسطوانة بأبو لونيوس)

12. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن الثلاث نقط لا تقع على إستقامة واحدة هو العمود المقام على المستوى المتكون من الثلاث نقط من مركز الدائرة المار بهم .

13. المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن ثلاث مستقيمات متقاطعة في نقطة واحدة N هو مخروط دائري قائم تكون المستقيمات الثلاثة رواسم له .

14. المحل الهندسي للمستقيمات العمودية على مستقيم معلوم l من نقطة معلومة M هو المستوى α المار بالنقطة M عموديا على المستقيم l .

15. المحل الهندسي للمستقيمات التي تمر خلال نقطة معلومة M بحيث تميل بزاوية معلومة Φ على مستقيم k هو مخروط دائري قائم رأسه هي نقطة M ومحوره يوازي المستقيم l ومقداره نصف زاوية الرأس Φ .

16. المحل الهندسي لرؤوس الزوايا القائمة التي أضلاعها تمر بالنقطتين A , B عبارة عن سطح كرة قطرها A , B

17. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والمتساوية البعد عن ثلاث نقط هو العمود المقام من مركز الدائرة التي تمر بالثلاث نقط على مستوى هذه الدائرة .

18. المحل الهندسي لجميع النقط الفراغية والمتساوية البعد عن ثلاث مستقيمات متوازية معلومة هو محور إسطوانة دائرية قائمة فيها الثلاث مستقيمات رو اسم للسطح .

المــــــراجــــــــع

1. Engineering Graphics Fundamentals Arvid R.Eide., Roland D.Jenison., Lane H. Mashaw., Larry L. Northup., C. Gordon Sanders., 1985
2. Descriptive Geometry, Louis Gary Lamit., prentice Hall., 1983

3- الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محمد الرقباوى، عين شمس، 1979

4- الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /رامى طلعت ، 1983

5-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /ألفريد بشارة، دار النهضة العربية، 1963

6-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محب عزيزعبد المسيح، منشأة المعارف،1980

7-الهندسة الوصفية، أعضاء هيئة التدريس، هندسة الإسكندرية 2004

8-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محمد عبد اللطيف جودة،ممدوح إبراهيم، عبد الحكم أيوب،1997

9-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /وجيه ناعوم حنا، 1980

10-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محمد خليل بسيونى، د/محسن موسى، 2002

11-الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محمود حسام الدين، د/حنفى هنداوى هندسة طنطا، 1995

12--الهندسة الوصفية، أستاذ دكتور /محمد عباس حمامه، هندسة البترول والتعدين، 2000

13-الهندسة الوصفية، دكتور مهندس /أيمن على عاشور، 2002

الرسم الهندسي (الإسقاط) الهندسة الوصفية

إن علم الهندسة الوصفية هو من العلوم التي إعتمد عليها العالم في ماضيه وحاضره وسيعتمد عليها في مستقبله. وقد جاءت أهمية هذا العلم لما يقدمه للعالم من مساعدات تكون بمثابة حجر الزاوية في الصناعة وتطورها. وتأتي الأهمية لهذا العلم في أنه هو المحرك الأساسي والخطوة الأولى في عمليات التصنيع وخاصة الهياكل العامة لجميع المنتجات التي يتم إنتاجها في الأسواق والتي تختلف أشكالها من منتج لآخر. فإنتاج رفرف سيارة أو سقف أو أبواب أو هيكل طائرة من الصاج أو من المعادن الأخرى الموجودة في صورة ألواح أو منتجات بلاستيكية ذات هياكل دائرية أو حلزونية أو أي أشكال هندسية يستلزم معرفة أصل هذا الشكل الحقيقي على الأوراق حتى يتم تقطيعه على ألواح المعادن والتي بدورها يتم عمل إسطمبات للأشكال المطلوب إنتاجها ومن ثم تشكيل الألواح المعدنية على الشكل المطلوب، ويتم وضع في إفراد الأشكال النسب الموجودة للتشغيل والتشكيل والتي يتم عمل حساباتها أثناء إفراد الشكل. وأيضا في التقاطعات بين الأشكال الهندسية في المنتجات يتم تحديد شكل التقاطع وإفراده وعمل العمليات المطلوبة له حتى يتثنى أخذها في الإعتبار. و لذا ظهرت الأهمية القصوى لهذا العلم كأساس للصناعة. وكذلك ظهرت التطبيقاتفي الهندسة المدنية في رسم الخرائط وتحديد الخطوط والحفر والردم ورسم الخرائط الجوية و بعض الهياكل المدنية في التشكيلات الخرسانية للأشكال الخاصة. ومن عمل بهذا العلم في التخصصات الأخرى لم يعطه حقه في الوصف والتحليل وإيضاح الفائدة منه. لذا عكفنا على إعداد هذا الكتاب كجزء أول بالإسلوب الذى يتفاعل مع ذهن الطالب مباشرة دون إرهاقه في سرد النظريات العلمية دون فهم مرجعيتها وكذلك وضعنا فيه الأسرار التي بين السطور وإجتهدنا لنعلم الطالب الإسم الذى أطلقناه على هذا العلم وهو " علم الكلام وتفسير الأحلام" والذى أطلقناه ليعلم الطالب أن هذا العلم الأساس فيه وصف الكلام وليس الأرقام التي تلفت إنتباهه ويترك التركيز في وصف الموضوع. والجزء الثاني يتطرق لمعظم التطبيقات العملية والصناعية التي تعتمد على هذا العلم.

المؤلف

مكتبة الأنجلو المصرية
THE ANGLO-EGYPTIAN BOOKSHOP
The World of Words & Thoughts